題名

四元時空ベクトルの行列表記
と
マクスウェル方程式

日本文理大学　電気･電子工学科　竹本義夫

「行列ベクトル」の提案
(行列を使ったベクトル表示)

四元ベクトル <u>**行列ベクトル**</u>

$$\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

行列ベクトルの特徴

- (1)ベクトルとしての簡明さ
  (2)行列としての機能性
  をあわせ持つ。
- 「マクスウェル方程式」を簡便に行列表記(行列ベクトル)できる。
- また、相対論的変換(ローレンツ形式)も追加表記出来、見通しがよくなる。

行列ベクトルの特徴 (1)

- (1)ベクトルとしての簡明さ
  (2)行列としての機能性
  をあわせ持つ。
  ((四元ベクトル積))

$$\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ctct' + \underline{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} & \\ & ct\mathbf{r}' + \mathbf{r}ct' - i(\underline{\underline{\mathbf{r}\times\mathbf{r}'}}) \end{pmatrix}$$

四元ベクトル⇒行列⇒行列ベクトル

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct & \\ & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

四元ベクトル⇒行列

四元ベクトル$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$を　行列$\begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \in \left\{ X \in M(2,\mathbb{C}) / {}^t\overline{X} = X \right\}$で表す。

逆に、行列$\begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \overline{\beta} & d \end{pmatrix}$　に対して、$ct = \dfrac{a+d}{2}, x = \dfrac{a-d}{2}, y = \dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}, z = \dfrac{\beta-\overline{\beta}}{2i}$が対応する

例　　ベクトルが$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$のとき、　行列は$\begin{pmatrix} 1+2 & 3+4i \\ 3-4i & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3+4i \\ 3-4i & -1 \end{pmatrix}$であり

逆に、行列$\begin{pmatrix} 3 & 3+4i \\ 3-4i & -1 \end{pmatrix}$に対して、ベクトル成分　$ct=1, x=2, y=3, z=4$　が対応する。

四元ベクトル⇒行列ベクトル

四元ベクトル$\begin{pmatrix} ct \\ \\ \mathbf{r} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$を $\cancel{\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ct & \\ & (x \quad y \quad z) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix}$の形で表し、

これを<u>複素化</u>(複素4次元)する。

複素ベクトル$\begin{pmatrix} cT \\ \\ \mathbf{R} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cT \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$は $\cancel{\begin{pmatrix} cT & \\ & \mathbf{R} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} cT & \\ & (X \quad Y \quad Z) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} cT+X & Y+iZ \\ Y-iZ & cT-X \end{pmatrix}$に対応する。

定義 $\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cT & \\ & \mathbf{R} \end{pmatrix}$を<u>行列ベクトル</u> という

4元ベクトル積

$$\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ctct'+\underline{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} & \\ & ct\mathbf{r}'+\mathbf{r}ct'-i(\underline{\underline{\mathbf{r}\times\mathbf{r}'}}) \end{pmatrix}$$ が成り立つ。

定義　これを<u>4元ベクトル積</u>　という。

行列ベクトルの積

行列積より、

$$\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct'+x' & y'+iz' \\ y'-iz' & ct'-x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{l} (ctct'+\underline{xx'+yy'+zz'}) \\ +[(ctx'+xct')-i(\underline{\underline{yz-zy'}})] \end{array} & \begin{array}{l} [(cty'+yct')-i(\underline{\underline{zx'-xz'}})] \\ +i[(ctz'+zct')-i(\underline{\underline{xy'-yx'}})] \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} [(cty'+yct')-i(\underline{\underline{zx'-xz'}})] \\ -i[(ctz'+zct')-i(\underline{\underline{xy'-yx'}})] \end{array} & \begin{array}{l} (ctct'+\underline{xx'+yy'+zz'}) \\ -[(ctx'+xct')-i(\underline{\underline{yz'-zy'}})] \end{array} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ctct'+\underline{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} & \\ & ct\mathbf{r}'+\mathbf{r}ct'-i(\underline{\underline{\mathbf{r}\times\mathbf{r}'}}) \end{pmatrix}$$ が成り立つ。

四元ベクトル⇔行列⇔行列ベクトル

$$
\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\Leftrightarrow
\begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix}
\Leftrightarrow
\begin{pmatrix} ct & \\ & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \end{pmatrix}
$$

行列ベクトルの特徴 (2)

- 「マクスウェル方程式」を簡便に行列表記できる

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}$$

マクスウェル方程式(1→2)

＊マクスウェル方程式(1)

$$
\begin{cases}
\mathbf{rotE} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} & (ファラデーの式)\cdots(1)ベクトル \\
div\mathbf{B} = 0 & (磁束保存の式)\cdots(2)スカラー \\
div\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (ガウスの式)\cdots(3)スカラー \\
c^2\mathbf{rotB} - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} & (アンペールの式)\cdots(4)ベクトル
\end{cases}
$$

$(3)-(2)\times ci$(スカラー部)と　$(1)\times(-i)-(4)\div c$(ベクトル部)を作ると、

＊マクスウェル方程式(2)

$$
\begin{cases}
div(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (スカラー部)\cdots(2,3) \\
\dfrac{\partial(\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i\mathbf{rot}(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) = -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} & (ベクトル部)\cdots(1,4)
\end{cases}
$$

マクスウェル方程式（2→3）

＊マクスウェル方程式(2)

$$
\begin{cases}
div(\mathbf{E}-ic\mathbf{B}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(スカラー部)•••(2,3)} \\
\dfrac{\partial(\mathbf{E}-ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i\,\mathbf{rot}(\mathbf{E}-ic\mathbf{B}) = -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} & \text{(ベクトル部)•••(1,4)}
\end{cases}
$$

＊マクスウェル方程式(3)•••<u>行列ベクトル</u>表記

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbf{E}-ic\mathbf{B} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} div(\mathbf{E}-ic\mathbf{B}) & \\ & \dfrac{\partial}{\partial ct}(\mathbf{E}-ic\mathbf{B}) - i\,\mathbf{rot}(\mathbf{E}-ic\mathbf{B}) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}
$$

行列ベクトルの特徴 (3)

- また、相対論的変換(ローレンツ形式)も追加表記出来、見通しがよくなる。

$$
{}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{+} {}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+} = {}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}^{+}
$$

ローレンツ変換 (1→2)

座標系(ct', x', y', z')が　座標系(ct, x, y, z)に対してx軸方向に速度vで動いているとき

*ローレンツ変換(1)

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \cosh\Theta、\quad \gamma\beta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \sinh\Theta$$

*ローレンツ変換(2)

$$\begin{cases} ct' + x' = \gamma(1 - \beta)(ct + x) \\ ct' - x' = \gamma(1 + \beta)(ct - x) \\ y' + iz' = y + iz \\ y' - iz' = y - iz \end{cases}$$

ローレンツ変換（2→3）

*ローレンツ変換(2)

$$\begin{cases} ct'+x'=\gamma(1-\beta)(ct+x) \\ ct'-x'=\gamma(1+\beta)(ct-x) \\ y'+iz'=y+iz \\ y-iz'=y-iz \end{cases}$$

この変換を行列を用いて表わすと、

*ローレンツ変換(3)•••<u>行列</u>

$$\begin{pmatrix} ct'+x' & y'+iz' \\ y'-iz' & ct'-x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1-\beta)(ct+x) & y+iz \\ y-iz & \gamma(1+\beta)(ct-x) \end{pmatrix}$$

ローレンツ形式(1)

*ローレンツ形式(1)•••行列

$$\begin{pmatrix} ct'+x' & y'+iz' \\ y'-iz' & ct'-x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1-\beta)(ct+x) & y+iz \\ y-iz & \gamma(1+\beta)(ct-x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_+ - \gamma_- & 0 \\ 0 & \gamma_+ + \gamma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ - \gamma_- & 0 \\ 0 & \gamma_+ + \gamma_- \end{pmatrix}$$

$\gamma_+ = \cosh\frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}},\quad \gamma_- = \sinh\frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$とすると、$\gamma_+{}^2 + \gamma_-{}^2 = \gamma,\quad 2\gamma_+\gamma_- = \gamma\beta$

$\therefore\ (\gamma_+ + \gamma_-)^2 = \gamma(1+\beta),\ (\gamma_+ - \gamma_-)^2 = \gamma(1-\beta),\quad \gamma_+{}^2 - \gamma_-{}^2 = 1$ である。

ローレンツ形式（1→2）

*ローレンツ形式(1)•••行列

$$\begin{pmatrix} ct'+x' & y'+iz' \\ y'-iz' & ct'-x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ - \gamma_- & 0 \\ 0 & \gamma_+ + \gamma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ - \gamma_- & 0 \\ 0 & \gamma_+ + \gamma_- \end{pmatrix}$$

*ローレンツ形式(2)•••行列ベクトル

$$\begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ローレンツ形式（2→3）

*ローレンツ形式(2)•••行列ベクトル表記

$$\begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix}$$

*ローレンツ形式(3)•••省略形

$$\begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix} = {}^{-}\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix}^{-}$$

定義　この形式をローレンツ形式　という。

ポテンシャルの微分 (1)

微分演算子(共役)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct'} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} = {}^{-}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{-}$$

四元ポテンシャル

$$\begin{pmatrix} \phi' & \\ & -c\mathbf{A}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} = {}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+}$$

ポテンシャルの微分 (2)

$$
{}^{-}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{-} {}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \boldsymbol{\gamma}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}
$$

ポテンシャルの微分（3）

電磁場

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial ct} + c\,div\mathbf{A} & \\ & -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\,\phi - ic\,\mathbf{rot}\mathbf{A} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

とする。

電磁場（複素四元ベクトル）

（ローレンツ形式）

$$
{}^{-}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{-} {}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+} = {}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E}-ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+}
$$

E_t: 時間成分、$\mathbf{E}-ic\mathbf{B}$：空間成分

電磁場の微分 (1)

ポテンシャルのラプラシァン

$$ {}^{+}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} & \\ & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{+} {}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E}-ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+} = {}^{+}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} & \\ & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{+} {}^{-}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{-} {}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+} $$

$$ = {}^{+}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial ct^2}-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-} {}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+} $$

電磁場の微分（2）

マクスウェル方程式

$$
{}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{+}
{}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E}-ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+}
= {}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial ct^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-}
{}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+}
$$

$$
= {}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}^{+}
$$

マクスウェル方程式
(ローレンツ形式)

$$
{}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{+} {}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+} = {}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}^{+}
$$

電磁場とマクスウェル方程式

電磁場

$$
{}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E}-ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+} = {}^{-}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{-} \, {}^{+}\begin{pmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^{+}
$$

マクスウェル方程式

$$
{}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^{+} \, {}^{-}\begin{pmatrix} E_t & \\ & \mathbf{E}-ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+} = {}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}^{+}
$$