

題名

相対論的重力方程式 (ニュートン型) の解釈

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫

目的

「ポテンシャル→電磁場→ローレンツ力」の
発生メカニズムを真似て

1. 重力を発生させる
2. 重力方程式を作る
3. 方程式を解釈する

(I) 必要な道具1(四元ベクトル積)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct + x & y + iz \\ y - iz & ct - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' + x' & y' + iz' \\ y' - iz' & ct' - x' \end{pmatrix}, \mathbf{r} = [x, y, z] \\
 & \begin{matrix} \text{空間成分} \\ \text{時間成分} \end{matrix} \\
 & = \begin{pmatrix} (ctct' + \underline{xx'} + \underline{yy'} + \underline{zz'}) & [(cty' + yct') - i(\underline{zx'} - \underline{xz'})] \\ +[(ctx' + xct') - i(\underline{yz} - \underline{zy}')] & +i[(ctz' + zct') - i(\underline{xy'} - \underline{yx'})] \\ \text{(行列積)} \\ [(cty' + yct') - i(\underline{zx'} - \underline{xz'})] & (ctct' + \underline{xx'} + \underline{yy'} + \underline{zz'}) \\ -i[(ctz' + zct') - i(\underline{xy'} - \underline{yx'})] & -[(ctx' + xct') - i(\underline{yz'} - \underline{zy'})] \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} ctct' + \underline{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} & \\ & ctr' + rct' - i(\underline{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}) \end{pmatrix} \\
 & \begin{matrix} \text{スカラー積、} & \text{ベクトル積(複素数)} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

(I) 必要な道具2(時間成分)

(A) 4元ポテンシャル (ϕ, cA)

⇒ 電磁場は $(\mathbf{E}_t, \mathbf{E} - ic\mathbf{B})$ 複素4元ベクトルである。(H3)
微分

時間成分の導入

(B) クーロン・ローレンツ力は電荷・電流と電磁場との

相互作用である。(H5, H18) $(q, \frac{\mathbf{j}}{c}) = (q_0\gamma, q_0\gamma\boldsymbol{\beta}) = \frac{q_0}{c}(u_0, \mathbf{u})$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \mathbf{E}_t + \frac{\mathbf{j}}{c} \times c\mathbf{B}$$

時間成分による力

(A)電磁場は複素4元ベクトル。

電磁場 = ポテンシャルの微分 (H3,H18)

$$\begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{pmatrix}^+$$

四元ベクトル積

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div} c\mathbf{A} & (\text{電場の時間成分、スカラー積}) \dots (1) \\ \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{A}}{\partial ct} - \text{grad} \phi & (\text{電場、スカラー倍}) \dots (2) \\ c\mathbf{B} = \text{rot} c\mathbf{A} & (\text{磁場、ベクトル積}) \dots (3) \end{cases}$$

(四元ベクトル積・・・前掲)

$$\begin{pmatrix} ct \\ \text{時間成分} \\ \mathbf{r} \\ \text{空間成分} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}, \mathbf{r} = [x, y, z]$$

$$= \begin{pmatrix} ctct' + \underbrace{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}_{\text{スカラー積}} \\ c\mathbf{r}' + \mathbf{r}ct' - i(\underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}_{\text{ベクトル積}}) \end{pmatrix}$$

(B)クーロン・ローレンツ力

ローレンツ力 = 電磁場 × 電流 ∴ 相互作用(H5,H18)

$$\begin{pmatrix} F_t \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix}$$

四元ベクトル積

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_t = qE_t + \frac{\mathbf{j}}{c} \cdot \mathbf{E} - i \frac{\mathbf{j}}{c} \cdot c\mathbf{B} \text{ (エネルギーの変化)} \dots (1) \\ \mathbf{F} = \frac{\mathbf{j}}{c} E_t + \underbrace{q(\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}_{\text{クーロン力}} + i \frac{\mathbf{j}}{c} \times (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) \dots (3) \end{cases}$$

ローレンツ力

下線部 : 複素力(重要)

(Ⅱ) 重力(発生)

(C) 重力と電磁力(類似性) (H20)

(i) ポテンシャルの類似・・・距離に反比例

(ii) 力の類似・・・逆2乗

(D) 重力の発生・・・メカニズムも同じ(H9,H2)

★ポテンシャル⇒重力場(模倣)⇒力

(C)重力と電磁力(類似性) (i)

(i) ポテンシャルの類似・・距離に反比例
(電磁力)静止状態の電荷 e のとき、ポテンシャルは

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}, \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

(重力)静止状態の質量 M のとき、重力ポテンシャルは

$$U = -\frac{G}{c^2} \frac{M}{r}$$

(C)重力と電磁力(類似性) (ii)

(ii) クーロン力と重力の類似・・・逆2乗

(電磁力) 運動している電荷 $\frac{q_0}{c} (u_t, \mathbf{u})$ が受ける力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{e}{r} \right) \frac{u_t}{c}$$

(重力) 静止状態の質量 M のとき、重力は

$$\mathbf{f} = -m_0 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{Gm_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \left(\times \frac{u_t}{c} \right)$$

★質点 m_0 が運動

(D)重力の発生(構成) (i)

(i)重力場 = **ポテンシャル** の微分 (**E** : 電場、**g_E** : 重力場)
(電磁場)

$$\begin{pmatrix} E_t (= 0) \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} (= \mathbf{0}) \end{pmatrix}^+ = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \frac{e}{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^+$$

(重力場)H9,H20

$$\begin{pmatrix} g_{Et} (= 0) \\ \mathbf{g}_E - icg_B (= \mathbf{0}) \end{pmatrix}^+ = -\frac{G}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \frac{M}{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^+$$

★静止電荷 **e**, 質量**M**

(D)重力の発生(構成) (ii)

(ii) 重力(ローレンツ力) = 重力場 × 質量 (相互作用)
(電磁力)

$$\begin{pmatrix} F_t \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = \frac{q_0}{c} \begin{pmatrix} E_t (= 0) \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} (= \mathbf{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

(重力) H9,H20・・・ローレンツ変換で不変(相対論的)

$$\begin{pmatrix} f_t \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} = \frac{m_0}{c} \begin{pmatrix} g_{Et} (= 0) \\ g_{\mathbf{E}} - icg_{\mathbf{B}} (= \mathbf{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

★重力場

(D)重力の発生((i) , (ii)) (iii)

(iii) **ポテンシャル** (⇒重力場)⇒**重力** の発生
(重力) H9,H20

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f_t \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} &= -\frac{G}{c^2} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} & \\ & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m_0 \frac{u_t}{c} \\ \\ m_0 \frac{\mathbf{u}}{c} \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{G}{c^2} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \cdot m_0 \frac{u_t}{c} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) m_0 \frac{u_t}{c} \dots (\text{クーロン力}) \\ +i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \times m_0 \frac{\mathbf{u}}{c} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(D)重力の発生(方程式) (iv)

(iv) 重力と重力方程式(成分表示) H9,H20

(重力)

$$\begin{cases} f_t = \frac{Gm_0}{c^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \cdot \mathbf{u} & \text{(エネルギーの変化)...\text{(1)}} \\ \mathbf{f} = \frac{Gm_0}{c^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) u_t - i \frac{Gm_0}{c^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \times \mathbf{u} & \text{(運動量の変化).....\text{(2)}} \end{cases}$$

(重力方程式)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = \frac{Gm_0}{c^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \cdot \mathbf{u} \dots \text{(1)} \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{Gm_0}{c^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) u_t - i \frac{Gm_0}{c^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M}{r} \right) \times \mathbf{u} \dots \text{(2)} \end{cases}$$

下線部 : 複素力

(Ⅲ) 重力方程式(変形)

(E) 重力方程式(変形)

- (i) 球面座標系
- (ii) 座標変換(球面座標)

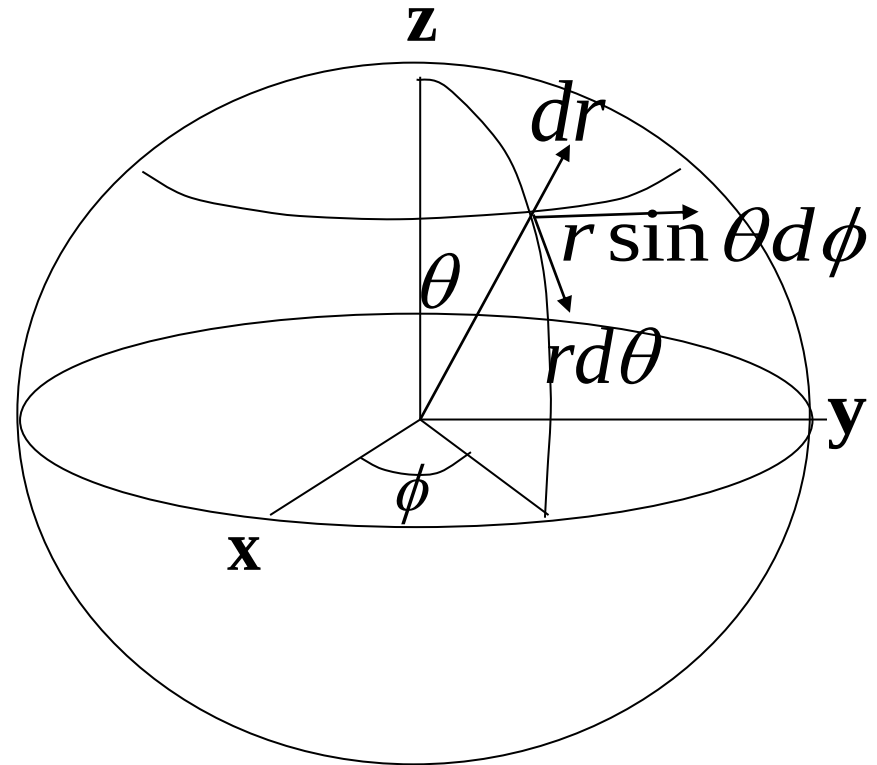
(F) 重力方程式(惑星)

- (i) 赤道上の惑星方程式
- (ii) 空間構造の方程式

(E)重力方程式(変形) (i)

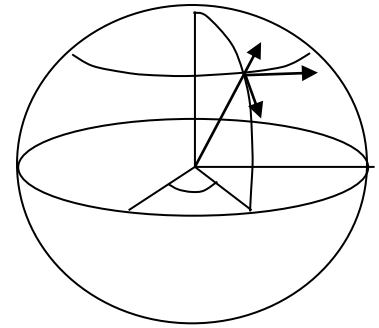
(i)球面座標系

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



(E)重力方程式(変形) (ii)

(ii)座標変換 ▪ ▪ 球面座標 (H9,H20)

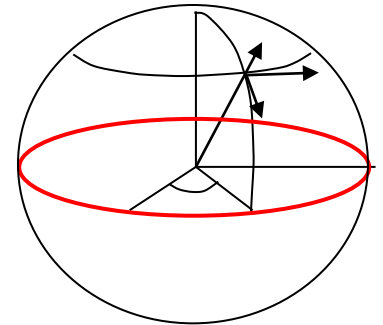


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \cdots (1)_{ct} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r^3} \left\{ \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left(r^2 \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right\} \cdots (2)_r \\ \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = -\left\{ i \frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right\} \left(r^2 \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \cdots i(3)_\theta \\ \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) = \left\{ i \frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right\} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) \cdots i(4)_\phi \end{array} \right.$$

(F)重力方程式(変形) (i)

(i) **赤道上の惑星方程式** $(\theta = \frac{\pi}{2} - i\Omega)$ Ω : 虚角

* $\tanh \Omega = r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct}$ で決定される。



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \dots (1)_{ct} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r^3} \left\{ (r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau})^2 - (r^2 \frac{d\Omega}{d\tau})^2 \right\} \dots (2)_r \\ \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\Omega}{d\tau} \right) = \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau} \right) (r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}) \dots (3)_{\Omega} \\ \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau} \right) = \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau} \right) (r^2 \frac{d\Omega}{d\tau}) \dots (4)_{\phi} \end{array} \right.$$

(F)重力方程式(変形) (ii)

(ii)空間構造の方程式

★全運動エネルギー ★ポテンシャルエネルギー

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dct}{d\tau} = C_0 e^{\frac{M_G}{r}} \cdots (1) \text{ [全エネルギー]} \\ \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left\{ \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \left(r \frac{d\Omega}{d\tau}\right)^2 \right\} = c^2 \cdots (2) \text{ [メトリック]} \\ \frac{d^2}{d\tau^2} (r \sinh \Omega) = \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau}\right) \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct} - \tanh \Omega\right) \cosh \Omega \left(\frac{dct}{d\tau}\right) \cdots (3) \text{ [空間構造]} \\ \left(r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \left(r^2 \frac{d\Omega}{d\tau}\right)^2 = C^2 \cdots (4) \text{ [面積速度一定]} \end{array} \right.$$

(IV)空間構造の方程式(導出)

(G)空間構造の方程式(導出)

(1)'全エネルギー

(2)'メトリック

(3)'空間構造

(4)'面積速度

(G)空間構造の方程式(1)

(1) $\Rightarrow$ 全エネルギーとポテンシャルエネルギー

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \dots (1)_{ct} \text{より}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\log \frac{dct}{dc\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{M_G}{r} \right)$$

$$\text{よって、} \frac{dct}{d\tau} = C_0 e^{\frac{M_G}{r}} [\text{全エネルギー}]$$

(1)' [全エネルギー]の解釈

(1)' エネルギー保存則

$\frac{dct}{d\tau} = C_0 e^{\frac{M_G}{r}}$... (1) [全エネルギー]より、高さ r_0 から落下させると

★ポテンシャルの差

$$\left(\frac{dct}{d\tau}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = e^{\frac{M_G}{r} - \frac{M_G}{r_0}}, M_G = \frac{GM}{c^2}$$

よって、 $1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots = 1 + \left(\frac{M_G}{r} - \frac{M_G}{r_0}\right) + \dots$

$$\therefore -\frac{1}{2} m_0 v^2 + G \frac{m_0 M}{r} = G \frac{m_0 M}{r_0} = \text{一定}$$

(G)空間構造の方程式(2)

(1)、(2) $\Rightarrow$ (1)'メトリック

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \dots (1)_{ct}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ (r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau})^2 - (r \frac{d\Omega}{d\tau})^2 \right\} \dots (2)_r$$

(2)_r $\times \frac{dr}{d\tau}$ の計算と(1)'より

$$\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left\{ (r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau})^2 - (r \frac{d\Omega}{d\tau})^2 \right\} = c^2$$

(G)空間構造の方程式(3)

(3)、(4) $\Rightarrow$ (4)'面積速度一定

$$\frac{d}{d\tau}(r^2 \frac{d\Omega}{d\tau}) = (\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau})(r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}) \cdots (3)_{\Omega}$$

$$\frac{d}{d\tau}(r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}) = (\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau})(r^2 \frac{d\Omega}{d\tau}) \cdots (4)_{\phi}$$

$$(4)_{\phi} \times (r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}) - (3)_{\Omega} \times (r^2 \frac{d\Omega}{d\tau}) = 0 \text{より}$$

$$(r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau})^2 - (r^2 \frac{d\Omega}{d\tau})^2 = C^2$$

(G)空間構造の方程式(4)

(2)、(3) $\Rightarrow$ (3)'空間構造

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \left(r \frac{d\Omega}{d\tau}\right)^2 \dots (2)_r \right.$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\Omega}{d\tau}\right) = \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right) \dots (3)_{\Omega} \right\} \text{より}$$

$(2)_r \times \sinh \Omega + (3)_{\Omega} \times \cosh \Omega$ の計算をすると

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (r \sinh \Omega) = -\left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau}\right) (\tanh \Omega - r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct}) \cosh \Omega \left(\frac{dct}{d\tau}\right)$$

(3)'[空間構造]の解釈

(i) $M_G = 0$ の場合

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(r \sinh \Omega) = \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{d\tau}\right) \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct} - \tanh \Omega\right) \cosh \Omega \left(\frac{dct}{d\tau}\right) = 0 \text{より}$$

$$\frac{d}{d\tau}(r \sinh \Omega) = \frac{dr}{d\tau} \sinh \Omega + r \cosh \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = 0$$

$$* \frac{d}{d\tau}(r \sinh \Omega) \neq 0 \text{のときは} \frac{d}{d\tau}(r \sinh \Omega) = 0 \text{の揺らぎ}$$

で、時間がたてば $\frac{d}{d\tau}(\mathbf{r} \sinh \Omega) = \mathbf{0}$ に落ち着く

$\frac{d}{d\tau}(r \sinh \Omega) = 0$ の意味

$$\frac{d}{d\tau}(r \sinh \Omega) = \frac{dr}{d\tau} \sinh \Omega + r \cosh \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = 0 \text{ より}$$

$$\frac{dr}{d\tau} \tanh \Omega = -r \frac{d\Omega}{d\tau} \dots (*) \quad \text{と}$$

$$\tanh \Omega = r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct} \dots (**) \text{を得る。}$$

(*)と(**)の効用

(i)エネルギー (メトリック)の分解

(*)と(**)より $\frac{dr}{d\tau} \cdot r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct} = -r \frac{d\Omega}{d\tau} \dots (***)$

$$\begin{aligned} \frac{dct}{d\tau} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dct}\right)^2 - \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct}\right)^2 + \left(r \frac{d\Omega}{dct}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dct}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct}\right)^2}} \\ &= \cosh \Theta \cdot \cosh \Omega \end{aligned}$$

★視線方向

★回転方向

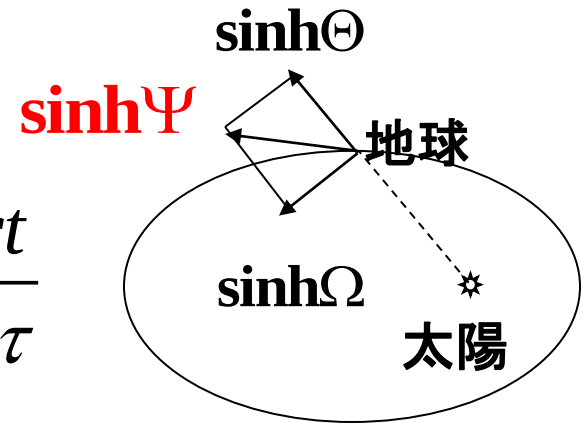
速度の合成

(ii) 速度の合成

(i)より

$$\begin{pmatrix} \cosh \Psi & \\ & \sinh \Psi \end{pmatrix}, \cosh \Psi = \frac{dct}{dc\tau}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \\ & \sinh \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \Omega & \\ & \sinh \Omega \end{pmatrix}$$



視線方向の合成

(iii) 視線の合成

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cosh \Theta_1 & \\ & \sinh \Theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \Theta_2 & \\ & \sinh \Theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \Theta_1 \cosh \Theta_2 + \sinh \Theta_1 \cdot \sinh \Theta_2 & \\ & \cosh \Theta_1 \sinh \Theta_2 + \sinh \Theta_1 \cosh \Theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\Theta_1 + \Theta_2) & \\ & \sinh(\Theta_1 + \Theta_2) \end{pmatrix} \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\tanh(\Theta_1 + \Theta_2) = \frac{\cosh \Theta_1 \sinh \Theta_2 + \sinh \Theta_1 \cosh \Theta_2}{\cosh \Theta_1 \cosh \Theta_2 + \sinh \Theta_1 \cdot \sinh \Theta_2} = \frac{\tanh \Theta_2 + \tanh \Theta_1}{1 + \tanh \Theta_1 \cdot \tanh \Theta_2}$$

(I)その他

★既存の結果を導く

(i) 水星の近日点移動

(ii) 光の重力による湾曲性

(iii) その他

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~takemoto/genko.html>

e-mail:takemoto@nbu.ac.jp