

# 題名

## ローレンツ変換に関する新しい概念

日本文理大学

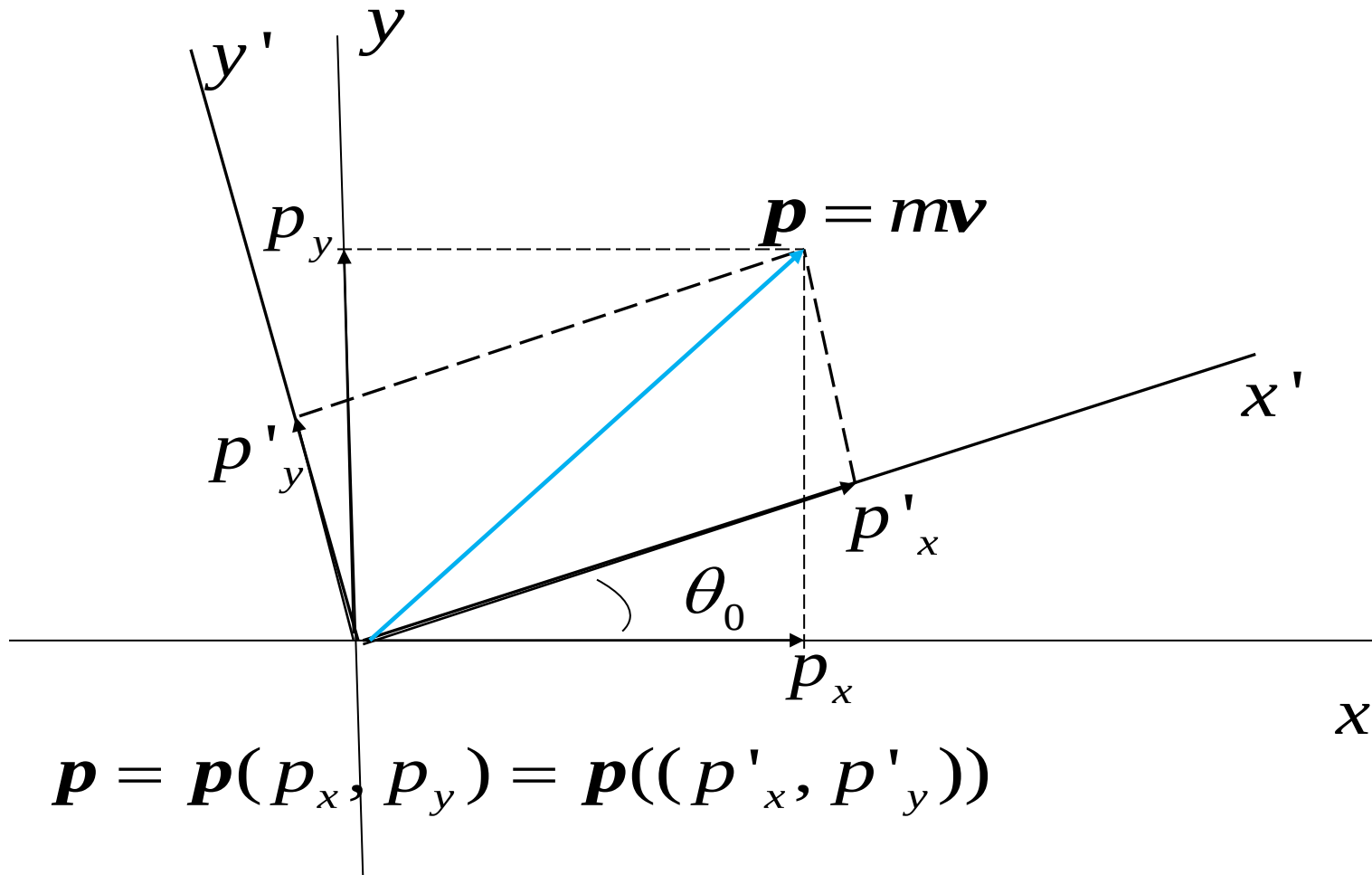
機械電気工学科    竹本義夫・島元世秀

# (( I .新しい概念))

(A) 3次元ベクトル(例:運動量)は  
座標軸を変えても成分が変わるだけで  
本質は変わらない。

(B) 4次元ベクトル(例:4元運動量)は  
座標軸を変えても成分が変わるだけで  
本質は変わらない。

# ((A.運動量))



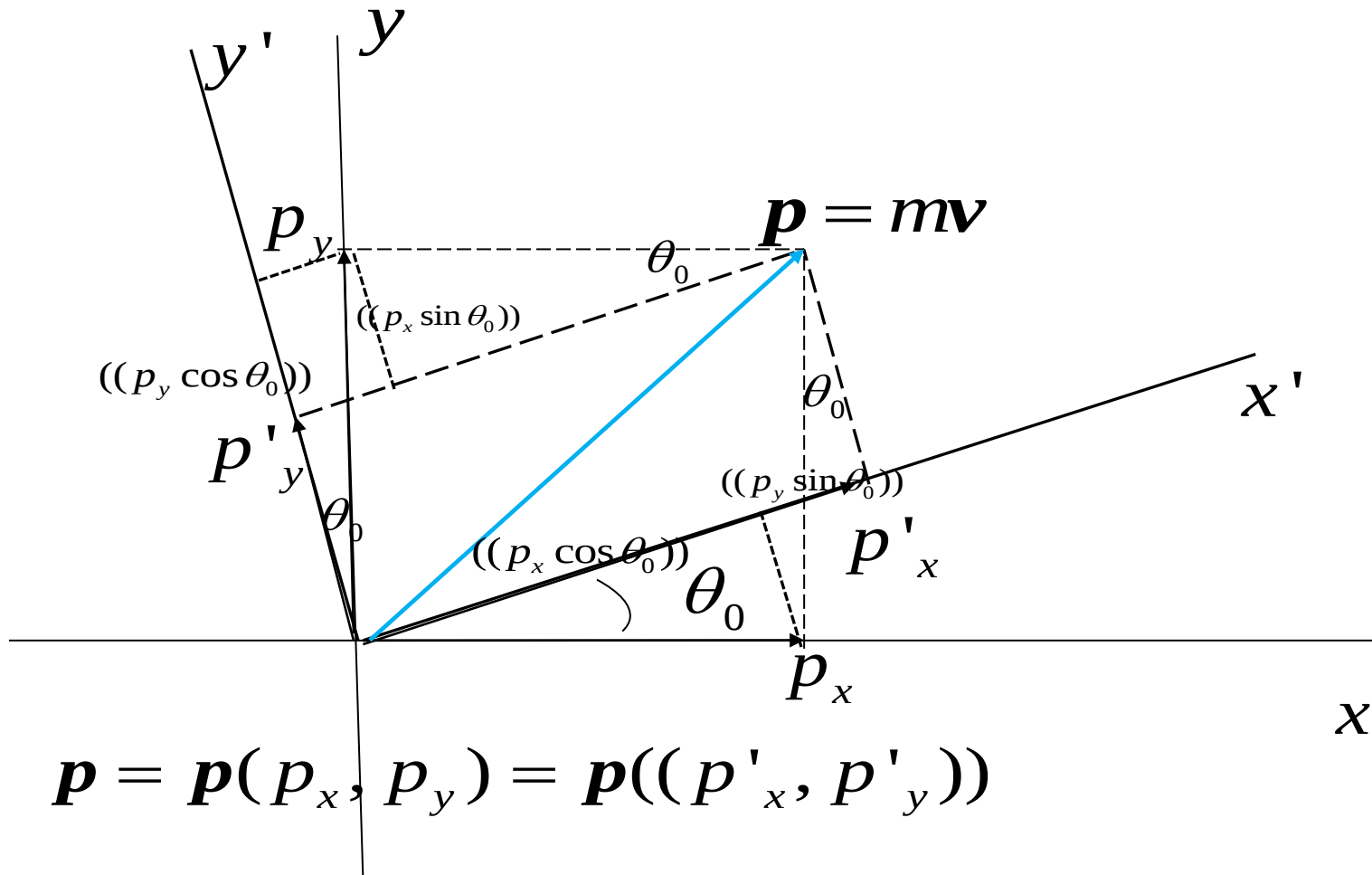
# ((回転))

- 座標軸の回転

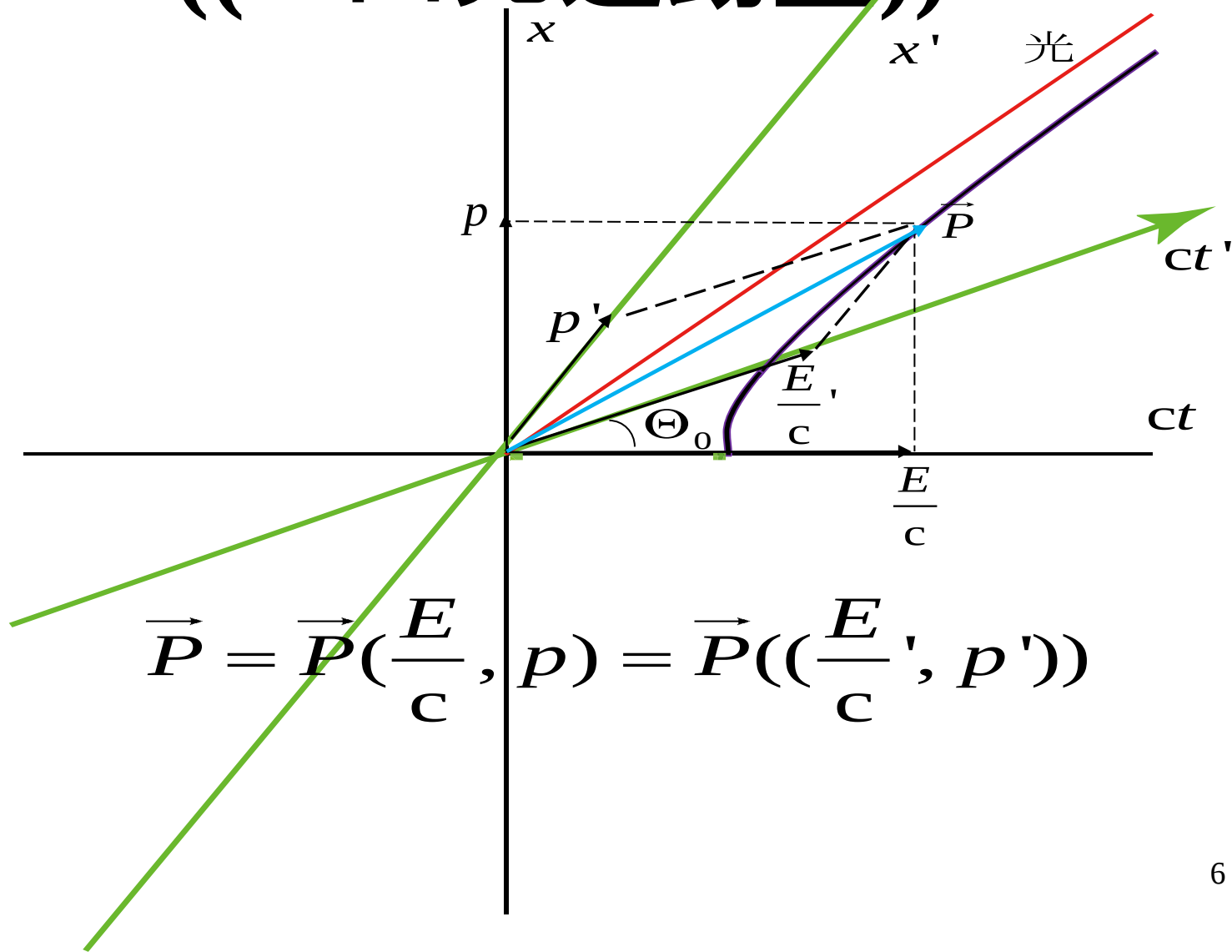
$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p'_x = p_x \cos \theta_0 + p_y \sin \theta_0 \\ p'_y = -p_x \sin \theta_0 + p_y \cos \theta_0 \end{cases}$$

((同一の点を表す))



# ((B.四元運動量))



# ((ローレンツ変換))

- 座標軸の回転

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Theta_0 & -\sinh \Theta_0 \\ -\sinh \Theta_0 & \cosh \Theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \frac{E}{c} \cosh \Theta_0 - p_x \sinh \Theta_0 \\ p'_x = -\frac{E}{c} \sinh \Theta_0 + p_x \cosh \Theta_0 \end{cases}$$

# ((作図で一致するとき))

$$\begin{cases} X = (X \cosh \Theta_0, X \sinh \Theta_0) \\ Y = (Y \sinh \Theta_0, Y \cosh \Theta_0) \end{cases}$$

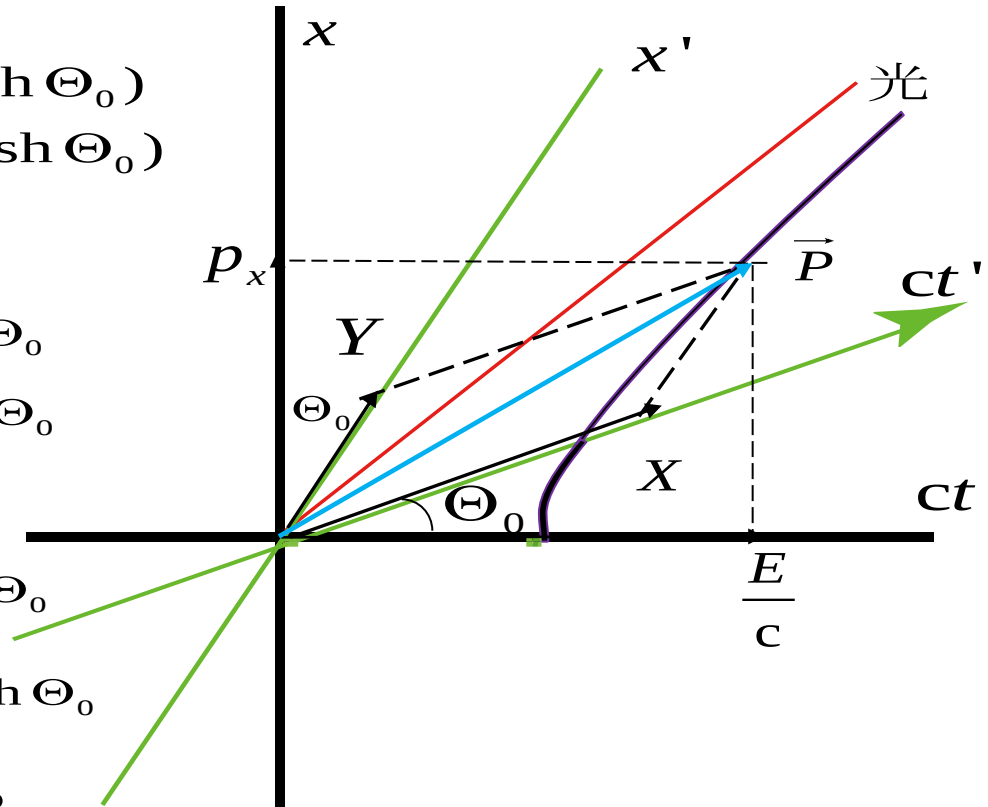
と  $\vec{P}$  で一致する事より

$$\begin{cases} \frac{E}{c} = X \cosh \Theta_0 + Y \sinh \Theta_0 \\ p_x = X \sinh \Theta_0 + Y \cosh \Theta_0 \end{cases}$$

よって、座標は

$$\begin{cases} X = \frac{E}{c} \cosh \Theta_0 - p_x \sinh \Theta_0 \\ Y = -\frac{E}{c} \sinh \Theta_0 + p_x \cosh \Theta_0 \end{cases}$$

ローレンツ変換で得られる。



$$\vec{P} = \vec{P}\left(\frac{E}{c}, p_x\right) = \vec{P}\left(\left(\frac{E'}{c}, p_x'\right)\right)$$

# ((座標軸の変換))

$(\frac{E'}{c}, p'_x)$ が

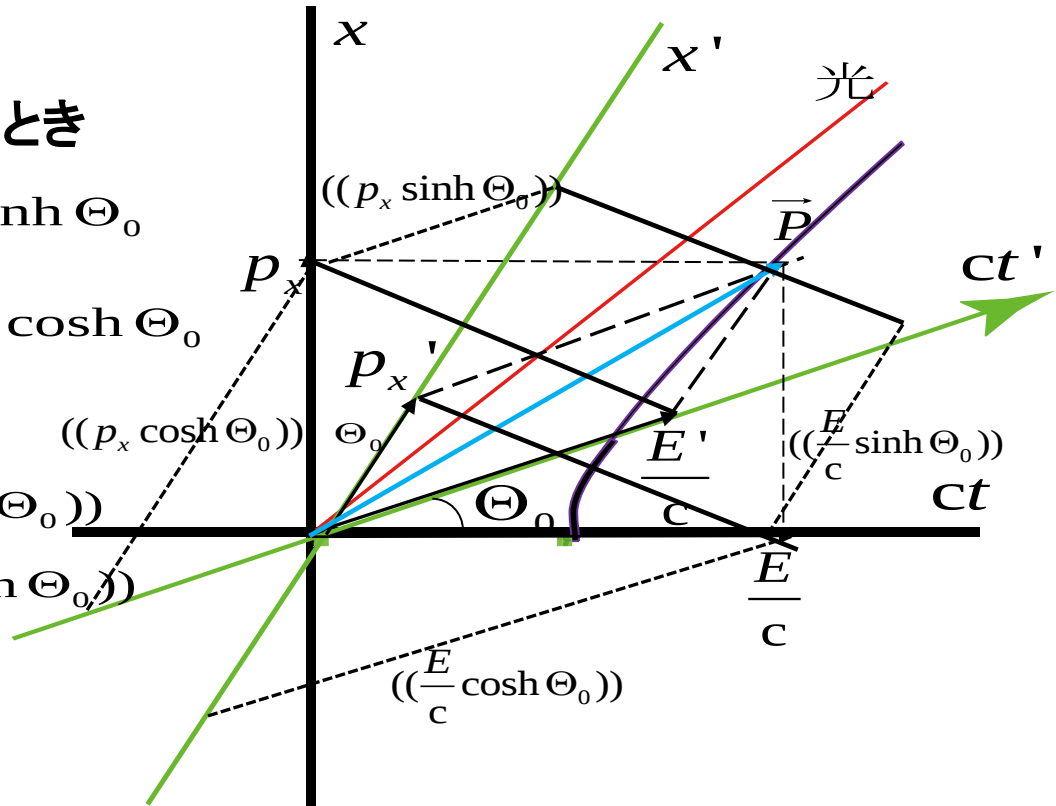
ローレンツ変換で得られるとき

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \frac{E}{c} \cosh \Theta_0 - p_x \sinh \Theta_0 \\ p'_x = -\frac{E}{c} \sinh \Theta_0 + p_x \cosh \Theta_0 \end{cases}$$

また

$$\begin{cases} \frac{E}{c} = ((\frac{E'}{c} \cosh \Theta_0, \frac{E'}{c} \sinh \Theta_0)) \\ p_x = ((p'_x \sinh \Theta_0, p'_x \cosh \Theta_0)) \end{cases}$$

を用いて、右の作図より  
同一の点  $\vec{P}$ を表す。



$$\vec{P} = \vec{P}(\frac{E}{c}, p) = \vec{P}((\frac{E'}{c}, p'))$$

# ((4元ベクトルの例))

## (i) 電荷(en bloc表記)

止まっている時  $\vec{q} = \begin{bmatrix} q & 0 \end{bmatrix}$

動いている時  $\vec{q} = \begin{bmatrix} q\gamma & q\gamma\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$   $q\gamma$ : 相対論的電荷  
 $q\gamma\boldsymbol{\beta}$ : 電荷流

## (ii) 質量 (en bloc表記)

止まっている時  $\vec{m} = \begin{bmatrix} im & 0 \end{bmatrix}$

動いている時  $\vec{m} = \begin{bmatrix} im\gamma & im\gamma\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$   $m\gamma$ : 相対論的質量  
 $m\gamma\boldsymbol{\beta}$ : 質量流

\*相対論的質量(=エネルギー/ $c^2$ ) \*質量流(=運動量/ $c$ )

# ((Ⅱ.新しいツール))

## (A) 弧度法(ユークリッド空間)

- 円の中心角と円弧の長さが比例する。
- 中心角を半径と円弧の長さの比で定義したものを弧度という。

## (B) 双曲弧度法(ミンコフスキー空間)

- 直角双曲線の虚角と双曲線弧の長さが比例する。
- 虚角を固有時と直角双曲線弧の長さの比で定義したものを双曲弧度という。

# ((A.弧度法))

- 円の座標を  $(x, y) = r_0(\cos \theta, \sin \theta)$  とすると

$$L = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

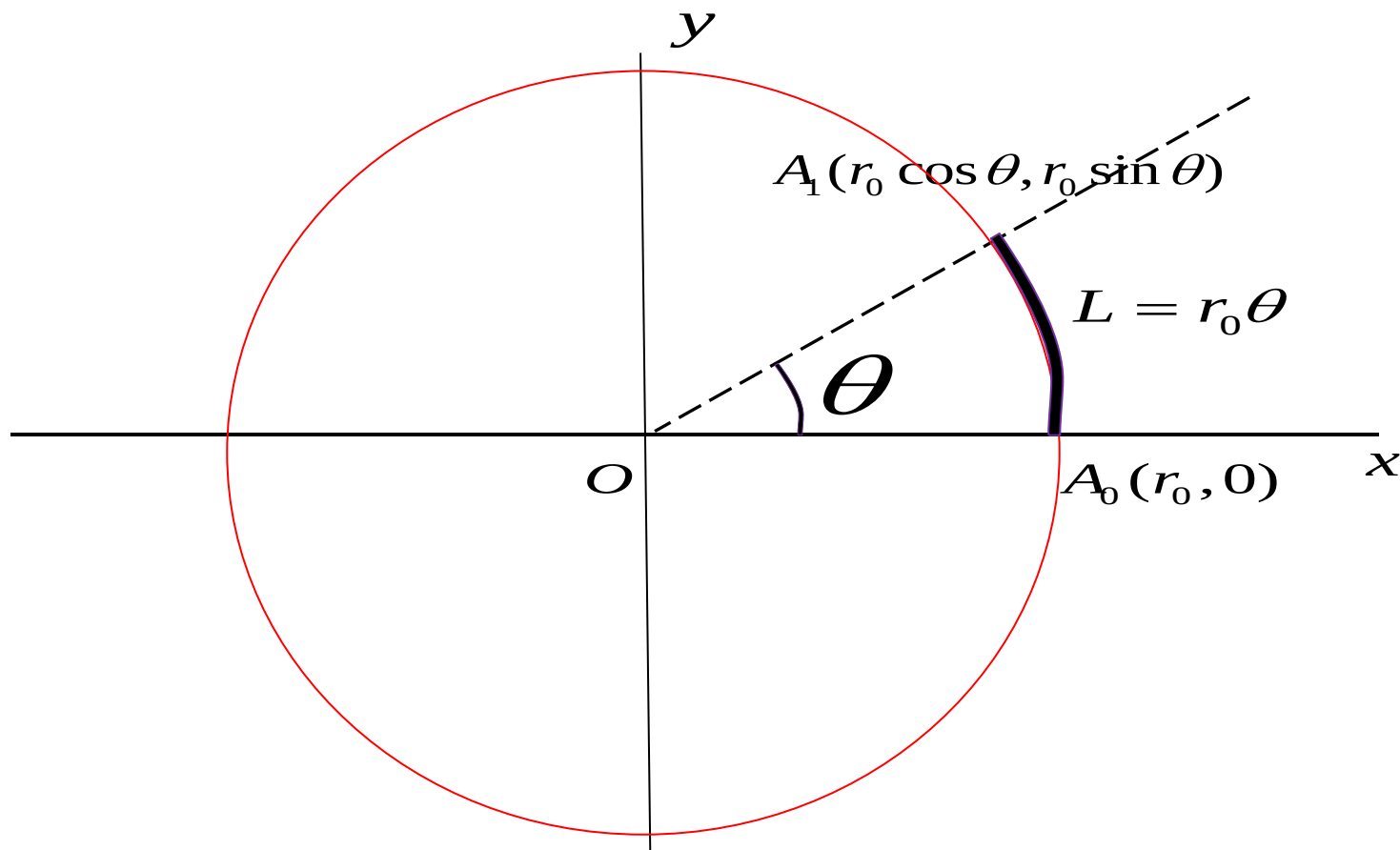
$$= r_0 \int_0^\theta \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = r_0 \int_0^\theta d\theta = r_0 \theta$$

により中心角  $\theta$ と 円弧の長さ  $L$ が比例する。

- 中心角を半径  $r_0$  と円弧の長さの比  $\frac{L}{r_0}$  で定義したものを弧度という。

# ((弧度法))

(ユークリッド空間)



# ((B.双曲弧度法))

- 直角双曲線の座標を  $(ct, x) = c\tau_0 (\cosh \Theta, \sinh \Theta)$

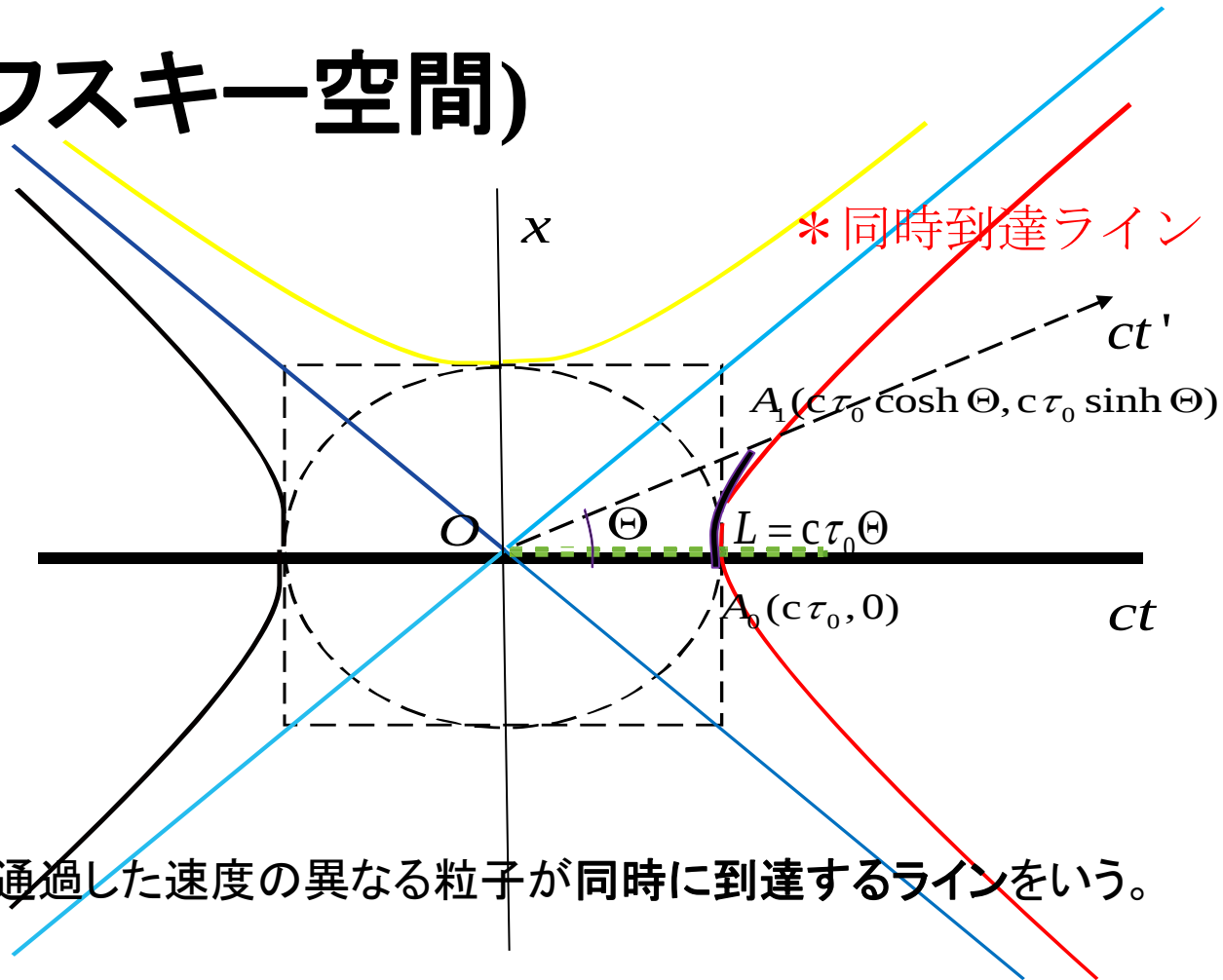
$$L = \int_0^\Theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^2 - \left(\frac{dct}{d\Theta}\right)^2} d\Theta \quad \text{とすると}$$
$$= c\tau_0 \int_0^\Theta \sqrt{\cosh^2 \Theta - \sinh^2 \Theta} d\Theta = c\tau_0 \int_0^\Theta d\Theta = c\tau_0 \Theta$$

により虚角  $\Theta$ と双曲線弧の長さ が比例する。

- 虚角を固有時  $c\tau_0$  と直角双曲線弧の長さの比  $\frac{L}{c\tau_0}$ で定義したものを双曲弧度という。

# ((双曲弧度法))

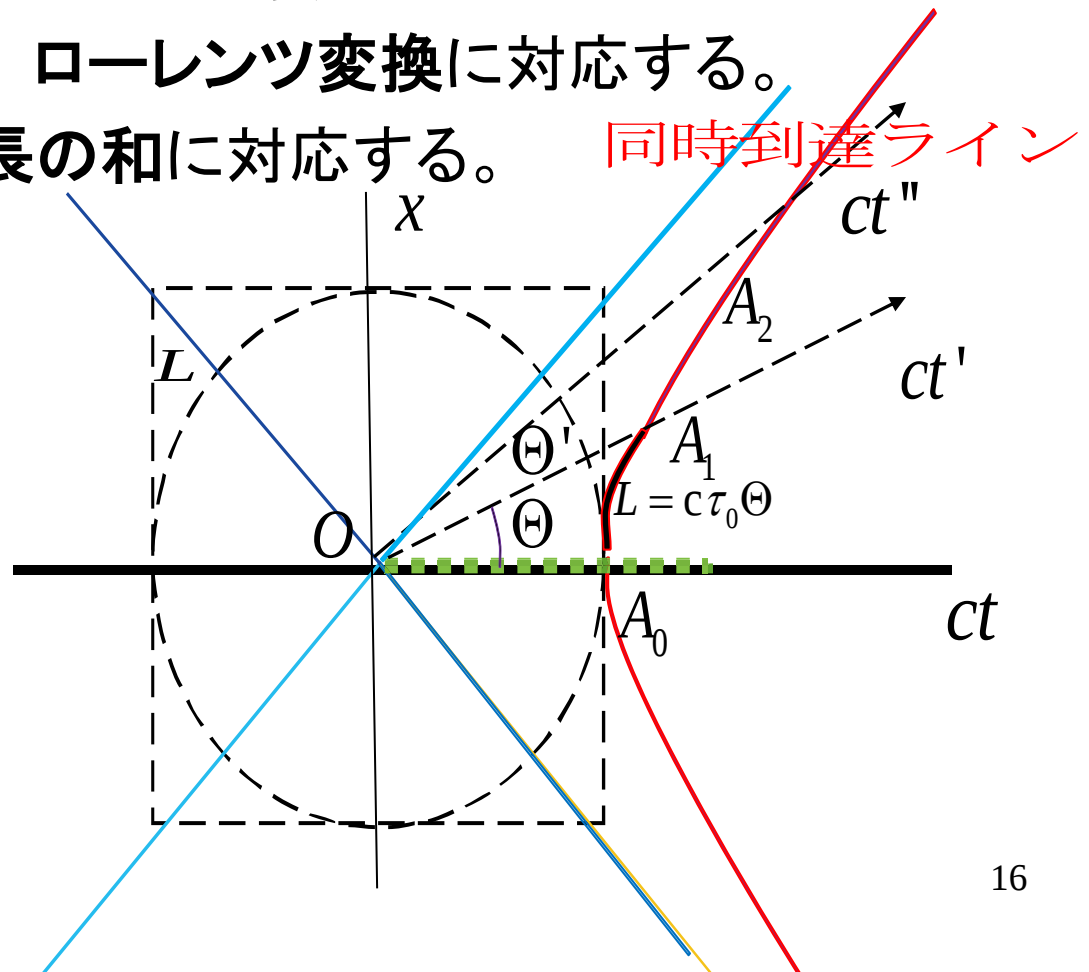
## (ミンコフスキー空間)



\* 原点を通過した速度の異なる粒子が同時に到達するラインをいう。

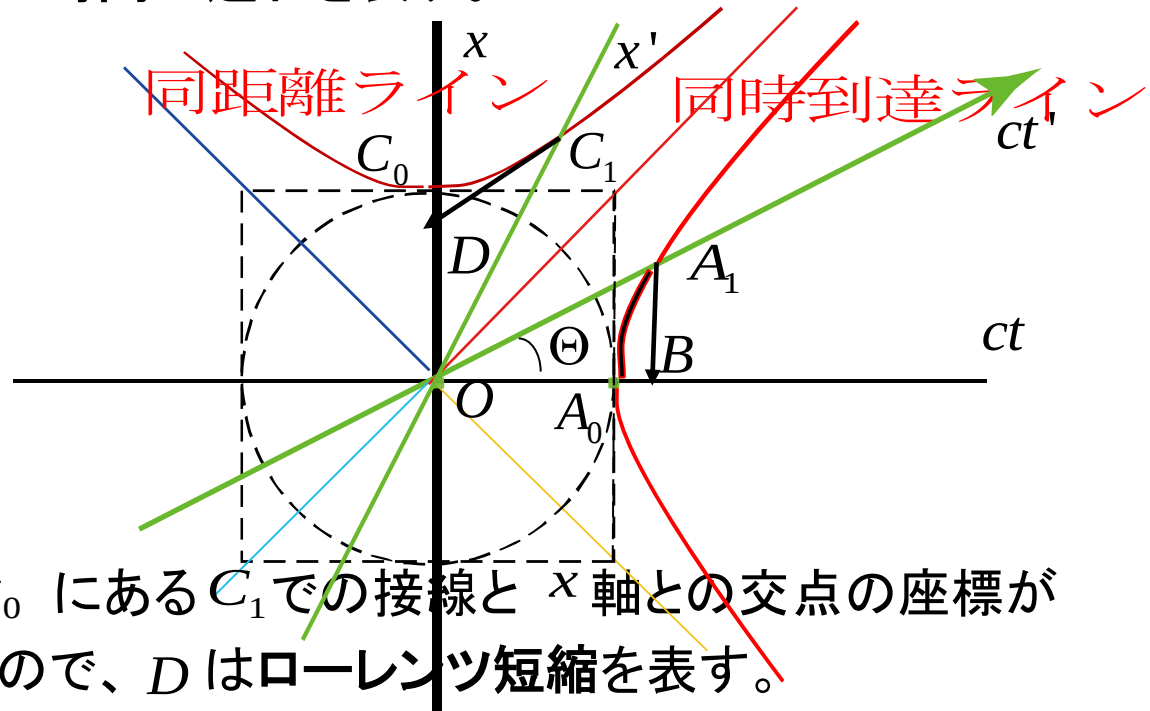
# ((ローレンツ変換との相性))

1. 同時到達ラインの一点が速度に対応し、ローレンツ変換に対応する。
2. 速度の合成は弧長の和に対応する。 同時到達



# ((時間の遅れとローレンツ収縮))

1.  $A_0$  と同時刻  $c\tau_0$  の  $A_1$  の座標が  $A_1(\underline{c\tau_0 \cosh \Theta}, \underline{c\tau_0 \sinh \Theta})$  であるので、 $B$  は時間の遅れを表す。



2.  $C_0$  と同距離  $x_0$  にある  $C_1$  での接線と  $x$  軸との交点の座標が  $D(0, \frac{x_0}{\cosh \Theta})$  であるので、 $D$  はローレンツ短縮を表す。

# ((まとめ))

慣性系の異なる人の時間・長さは

ローレンツ変換で対応する。

(ローレンツ変換は作図出来る。)  $\Rightarrow$

1つの慣性系での作図(世界線)が、  
そのまま他の慣性系での同一粒子の世界線  
でもある・・時間・長さの共通認識(概念)

# ((同時の相対性))

I. 静止粒子を表す直線  $ABC$ 、 $A'B'$  はどの座標系でも共通である。

$$A = A(0, x_0) = A((-x_0 \sinh \Theta, x_0 \cosh \Theta))$$

$$B = B(x_0, x_0) = B((x_0 e^{-\Theta}, x_0 e^{-\Theta}))$$

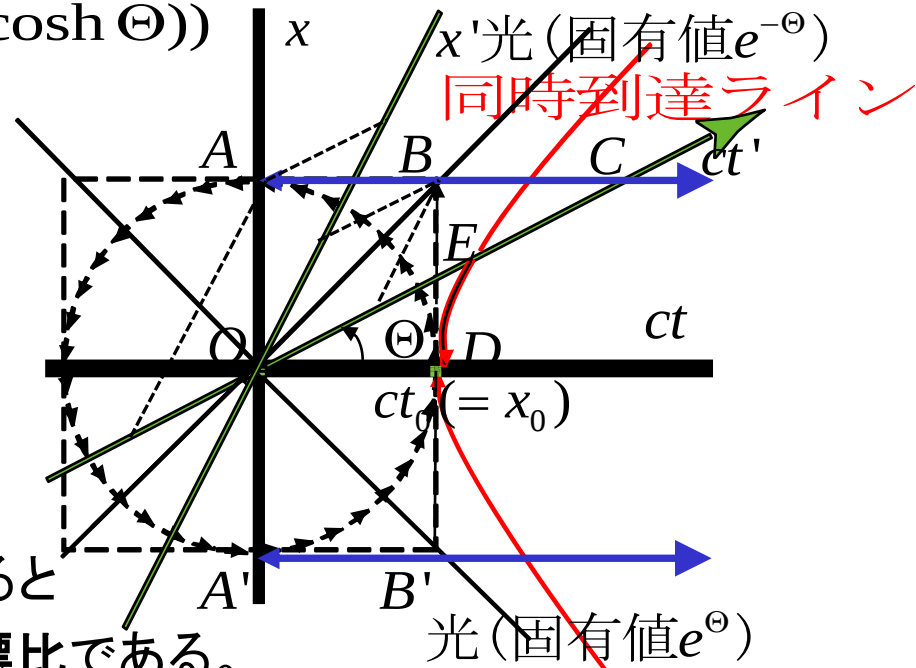
II. ローレンツ変換の固有値は  $e^{\mp\Theta}$ 、  
固有ベクトルは  $ct = \pm x$  (光) である。

(固有値について)

ローレンツ変換で直線  $OD$  は  $OE$  に移る。

同時到着ライン上  $D \rightarrow (E) \rightarrow \infty$  とすると

$B$  の座標比  $\frac{x_0 e^{-\Theta}}{x_0} = e^{-\Theta}$  が光軸の座標比である。



詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~takemoto/genko.html>