

題名

“周回振動エネルギー”と“加速量”
(水素原子内の電子をイメージして)

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫・島元世秀

A. 周回振動エネルギー(E')

(1) 周回振動エネルギーと振動数

$$E' = \frac{m_e c^2 \left(\frac{c}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} (= h\nu)$$

(2) 運動量と波長

$$P = \frac{m_e c \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} (= \frac{h}{\lambda})$$

a) 光のエネルギーと運動量

h : プランク定数とする。

(1) エネルギーと振動数

$$E = h\nu$$

(2) 運動量と波長

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

行列(4元運動量)

光のエネルギーと運動量 $\frac{E}{c} = P_x$
四元運動量を行列では

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ (P_x, 0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ (\frac{h}{\lambda_x}, 0, 0) \end{bmatrix}$$

$$\text{これより } \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda_x} \therefore \lambda_x \nu = c$$

*(慣れてなければ)ベクトルと見て構わない。⁴

b) 粒子のエネルギーと運動量

(1) エネルギーと振動数(対応しない)

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \quad (\neq h\nu)$$

(2) 運動量と波長

$$P = \frac{m_e c \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \quad (= \frac{h}{\lambda})$$

i. 周回振動エネルギー(定義)

(1) 粒子の速度 $\lambda \nu = \mathbf{v}$ (ド・ブロイ) を用いて

(2) $E' = h\nu$ が成り立つように定義して、

$$\begin{aligned} E' &= h \frac{\mathbf{v}}{\lambda} = P_x \mathbf{v} \\ &= \frac{m_e c^2 \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \quad \text{とする。} \end{aligned}$$

粒子の“エネルギー”と運動量

(1) 周回振動エネルギーと振動数

$$E' = \frac{m_e c^2 \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} (= h\nu)$$

(2) 運動量と波長

$$P = \frac{m_e c \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} (= \frac{h}{\lambda})$$

ii. 周回振動エネルギー(意味)

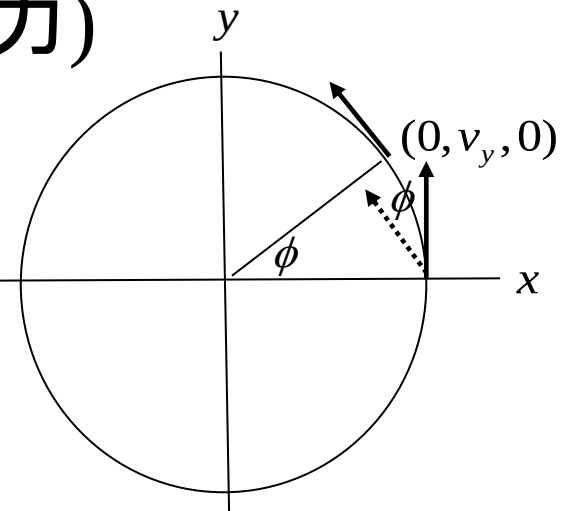
(円軌道を廻っている粒子に働く力)

(i) x方向の力は

$$f_x = -P \frac{d\phi}{d\tau}, \quad P = \frac{m_e c \left(\frac{\mathbf{v}_y}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_y}{c} \right)^2}}$$

(ii) z方向の力(回転)は

$$-icf_z = -iE' \frac{d\phi}{d\tau}, \quad E' = \frac{m_e c^2 \left(\frac{\mathbf{v}_y}{c} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_y}{c} \right)^2}}$$



電子の運動

行列(周回振動エネルギー)

行列では(円運動の時)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{(P_x \mathbf{v}_y, 0, i\underline{E'})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{(\frac{h\mathbf{v}_y}{\lambda_x}, 0, i\underline{h\nu_z})} \end{bmatrix}$$

$$\underline{P_x \mathbf{v}_y} = \underline{E'} \text{ より } \frac{\mathbf{v}_y}{\lambda_x} = \nu_z \therefore \lambda_x \nu_z = \mathbf{v}_y$$

iii. 周回振動エネルギー(用途)

(基底状態の電子運動)

プランク定数として、角運動量

$h = 2\pi r_1 m_e \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}}$ を用いると、

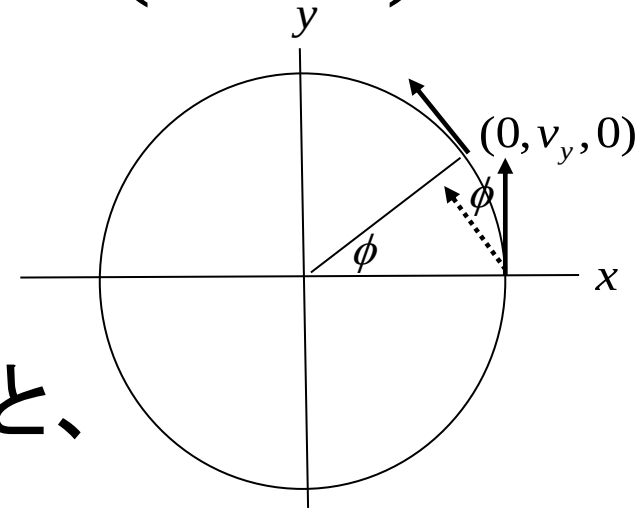
振動数は

$$\frac{E_1'}{h} (= \nu_1) = \frac{\mathbf{v}_1}{2\pi r_1},$$

波長は

$$\frac{h}{P_1} (= \lambda_1) = 2\pi r_1,$$

*放射光の振動数を表せる $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu_1}{\lambda_1} = \frac{\mathbf{v}_1}{\lambda_1} \sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}$



電子の運動

$$E_1' = \frac{m_e c^2 (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}}$$

$$P_1 = \frac{m_e c (\frac{\mathbf{v}_1}{c})}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}}$$

(参考)電子の遷移と振動数

(エネルギー差と放射 光の振動数)

$$\nu_{m \rightarrow n} = \frac{\Delta E_{m \rightarrow n}}{h} \cdot \cdot \text{通常}$$

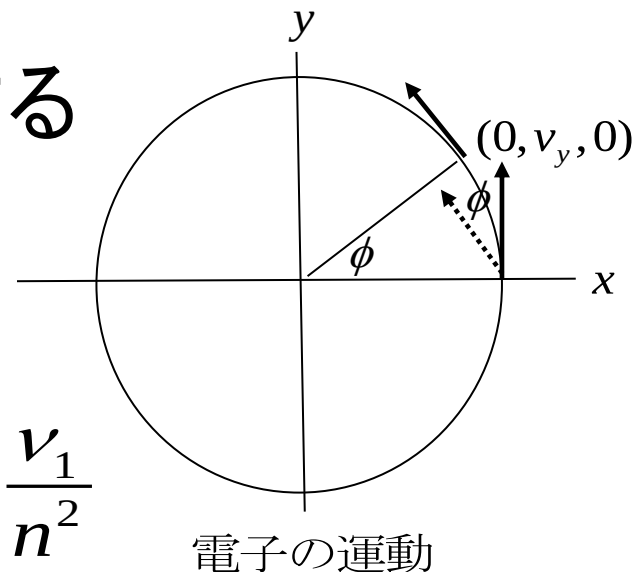
(加速量によりE'に還元される)

$$\nu_{m \rightarrow n} = \frac{\Delta E_{m \rightarrow n}}{h} \doteq \frac{E_{[n]}'}{h} - \frac{E_{[m]}'}{h} = \underline{\underline{\nu_{[n]} - \nu_{[m]}}}$$

第二軌道

第二軌道を(半径 $r_n = n^2 r_1$)とする
 電子の速度は $\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{v}_1}{n}$ より

$$\frac{E_n'}{h} (= \nu_n) = \frac{\mathbf{v}_1}{2\pi r_1 n^2} \frac{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_n}{c})^2}} \doteq \frac{\nu_1}{n^2}$$



波長は

$$\frac{h}{P_n} (= \lambda_n) = 2\pi r_1 n \frac{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_n}{c})^2}}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}_1}{c})^2}} \doteq n\lambda_1 \therefore \frac{E_n'}{P_n} = \frac{\mathbf{v}_1}{n} = \mathbf{v}_n$$

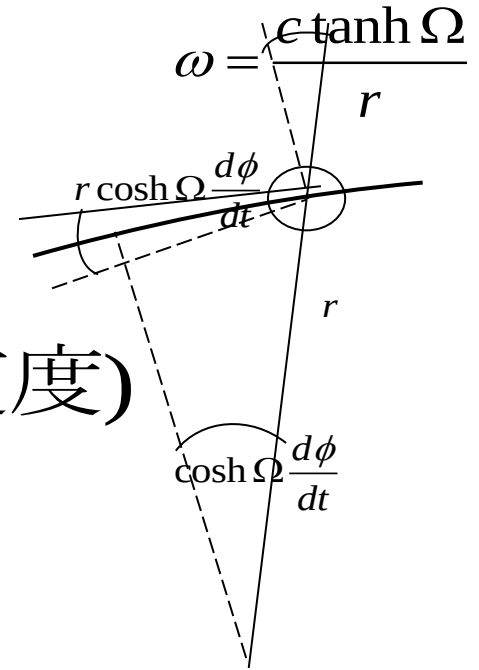
物質波としての解釈

(円運動のとき) Ω : 自転変数

$$\tanh \Omega = r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dc t} \text{ (公転速度)}$$

自転角速度は

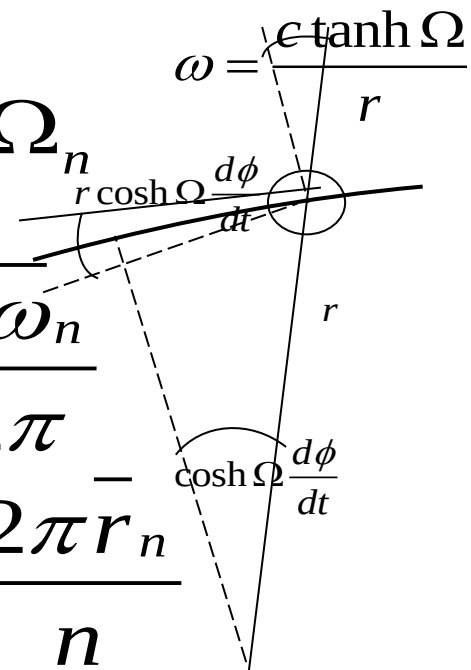
$$\omega = \frac{c \tanh \Omega}{r} = \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \text{ (公転角速度)}$$



第二軌道

(円運動のとき) $\tanh \Omega_1 = n \tanh \Omega_n$

$$\begin{aligned}\bar{v}_n &= v_n \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_n}{c}\right)^2} = \frac{c \tanh \Omega_1}{\bar{r}_n} = \frac{n \omega_n}{2\pi} \\ \bar{\lambda}_n &= \frac{\lambda_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_n}{c}\right)^2}} = \frac{2\pi \bar{r}_1 \tanh \Omega_1}{\tanh \Omega_n} = \frac{2\pi \bar{r}_n}{n} \\ \therefore \bar{\lambda}_n \bar{v}_n &= \frac{2\pi \bar{r}_n}{n} \frac{n \omega_n}{2\pi} = \bar{r}_n \bar{\omega}_n = \mathbf{v}_n\end{aligned}$$



B.加速量(電磁場)

(加速度)・・運動状態の変化

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{bmatrix}^+ \frac{e}{m_e c} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix}$$

(加速量・電磁場)・・加速を促すもの

$$\frac{e}{m_e c} \begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{bmatrix}^+ = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ -\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ -\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix}^{-,-1}$$

eVとJは異なる物理量である？

(a)電子ボルト(electron volt) [eV]

定義：1個の電子が真空中で電位差1Vの電極の間で加速されるときに得るエネルギーに等しい。

$$E_{eV} = E_{x(\text{電場})} \cdot edx \xrightarrow{y\text{方向}} \gamma E_{x(\text{電場})} \cdot edx$$

(b)ジュール(joule) [J]

定義：1Nの力がその力の方向に物体を1m動かすときの仕事。

$$E_J = F_{x(\text{力})} \cdot dx \xrightarrow{y\text{方向}} F_{x(\text{力})} \cdot dx$$

* (a)、(b)はローレンツ変換で異なる動きをする。

行列(eVとJ)

(a) 電子ボルト[eV] $\cdots E_{eV} = c f_t d\tau = \underline{\underline{E_{x(\text{電場})} \cdot e dx}}$

$$\vec{E}_{eV} = c \begin{bmatrix} f_t \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}} \end{bmatrix}^- d\tau = \begin{bmatrix} E_t \\ \underline{\underline{\mathbf{E} - ic\mathbf{B}}} \end{bmatrix}^+ \underline{\underline{e}} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \underline{\underline{\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}}} \end{bmatrix}^- \underline{\underline{d\tau}}$$

(b) ジュール [J] $\cdots E_J = \underline{\underline{\mathbf{f}_{x(\text{力})} \cdot dx}} = ce \underline{\underline{\mathbf{E} d\tau}}$

$$\vec{E}_J = \begin{bmatrix} f_t \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}} \end{bmatrix}^- \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \underline{\underline{-\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}}} \end{bmatrix}^+ \underline{\underline{d\tau}} = ce \begin{bmatrix} E_t \\ \underline{\underline{\mathbf{E} - ic\mathbf{B}}} \end{bmatrix}^+ d\tau$$

eVとJの微分は加速度と加速量

(a) 電子ボルト[eV] → 四元加速度

$$\left(\frac{d\vec{E}_{eV}}{d\tau} = \right) m_e c \frac{d}{d\tau} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix}}_{\text{四元加速度}} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\text{運動する電荷}}^+ e \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix}^-$$

(b) ジュール [J] → 加速量・電磁場(四元)

$$\left(\frac{d\vec{E}_J}{d\tau} = \right) m_e c^2 \frac{d}{d\tau} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix}}_{\text{静止状態からの加速}} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{bmatrix}^{-,-1} = ce \underbrace{\begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\text{加速量・電磁場(四元)}}^+$$

C.電子の遷移と振動数

(エネルギー差と放射光の振動数)

$$\nu_{m \rightarrow n} = \frac{\Delta E_{m \rightarrow n}}{h} \cdot \cdot \text{通常}$$

(加速量によりE'に還元される)

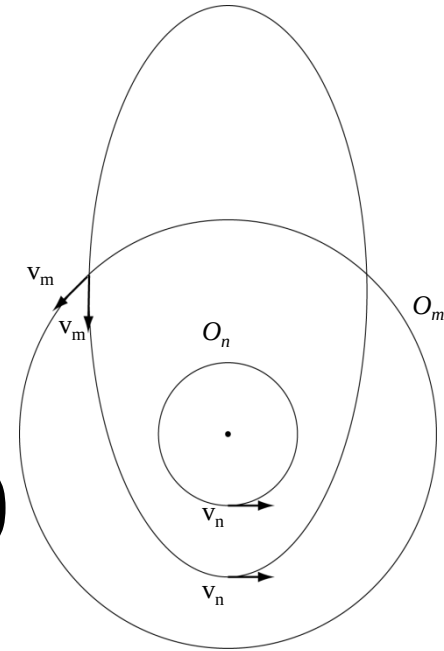
$$\frac{\nu_{m \rightarrow n}}{\text{通常}} = \frac{\Delta E_{m \rightarrow n}}{h} \doteq \frac{E_{[n]}'}{h} - \frac{E_{[m]}'}{h} = \frac{\nu_{[n]} - \nu_{[m]}}{\text{リッツの法則}}$$

加速量と光の放射(1)

(図の説明)・・・電子の遷移

(a) 円軌道 O_m の電子(速度 $\mathbf{v}_m$)が
同じ速度 $\mathbf{v}_m$ で楕円軌道に移り、

(b) その近日点 r_0 での速度 $\mathbf{v}_0 (= \mathbf{v}_n)$
で同じ速度 $\mathbf{v}_n$ の円軌道 O_n
に遷移する。



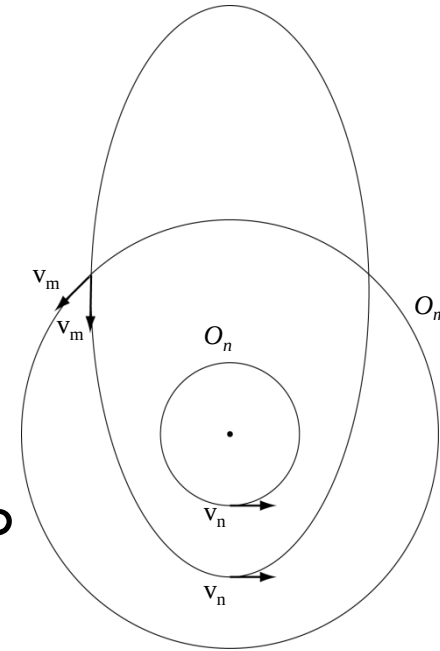
加速量と光の放射(2)

(図の説明2)・・・「加速量」の集積

(c)(仮に)中心力が変化すると、

$$Q_0 = \frac{r_0 m_e v^2}{ke} \rightarrow Q_n = \frac{r_n m_e v^2}{ke}$$

「加速量」の集積がおき、近日点から円軌道へ遷移する



(d)逆に、電子が遷移すると「加速量」の集積
(=「光の放射」)がおきる。

加速量と光の放射(3)

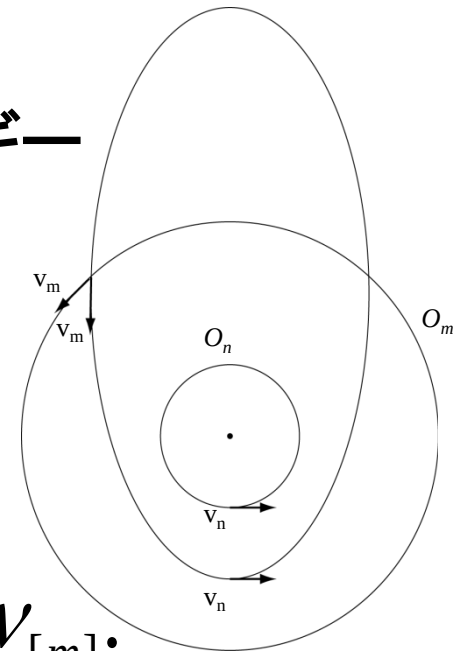
(図の説明3)・・・放射光の「振動数」

(e) 軌道のエネルギー差を周回振動エネルギーの差で表す

$$\Delta E_{m \rightarrow n} \doteq E_{[n]}' - E_{[m]}'$$

(f) これをプランク定数 $h = 2\pi r_1 m_e v_1$ で割ると

$$\nu_{m \rightarrow n} = \frac{\Delta E_{m \rightarrow n}}{h} \doteq \frac{E_{[n]}'}{h} - \frac{E_{[m]}'}{h} = \nu_{[n]} - \nu_{[m]}.$$



* 放射光の「振動数」を電子(物質波?)の「振動数」に還元できる。

(まとめ)

- (1)「周回振動エネルギー」と「加速量」
を用いる事により
- (2)「軌道のエネルギー差」を「周回振動エネルギーの差」で表すことが出来る。
- (3)結果として、「加速量」による放射光の振動数を
電子(物質波?)の振動数に還元出来る事になる。

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~takemoto/genko.html>