

題名

一般相対性理論の電磁気的重力理論 による解釈(対比)

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫

((結果))

「一般相対性理論」と
「電磁気的重力理論」は
異なる手法を用いているが
得られる式(方程式)が
ほとんど同じで
近い数値を
得る

((結果・時空))

(G)一般相対性理論(シュバルツシルトメトリック)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M_G}{r}\right) d^2ct + \frac{1}{1 - \frac{2M_G}{r}} dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

(E)電磁気的重力理論(ミンコフスキーメトリック)

$$ds^2 = -d^2ct + dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

を比べてみると、

$$\bullet \quad d'ct = \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} d^2ct \leftrightarrow d^2ct, \quad d'r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} dr \leftrightarrow dr$$

この対応があることが分かる

((結果・運動方程式1,2))

同じ対応を用いて (一般相対性理論) $\Leftrightarrow$ (電磁気的重力理論)

$$(G1) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right) = - \frac{M_G}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E1) \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right)$$

$$(G2) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) = - \frac{M_G}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow (E2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right\}$$

((結果・運動方程式3,4))

$$(G3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) = - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) + \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{(real)} = - \frac{1}{\underline{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) + \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

$$(G4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) = - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) - \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)_{(real)} = - \frac{1}{\underline{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) - \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)$$

の関係がある。

((結果・主方程式))

惑星・光の軌道を決定する・・・赤道上

(G)一般相対性理論

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \frac{d\frac{1}{r}}{d\phi} \right)^2 = -\frac{c^2}{C^2} + \frac{C_0^2}{C^2} \frac{1}{\frac{1 - \frac{2M_G}{r}}{r}} - \frac{1}{r^2}$$

(E)電磁気的重力理論

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-2\frac{M_G}{r}}}} \frac{d\frac{1}{r}}{d\Phi} \right)^2 = \left(-\frac{c^2}{C^2} + \frac{C_0^2}{C^2} \frac{1}{\frac{e^{-2\frac{M_G}{r}}}{r}} - \frac{1}{r^2} \right) e^{2\frac{M_G}{r}}$$

ここで、
$$d\Phi = \sqrt{(\cosh \Omega d\phi)^2 - (d\Omega)^2}$$

((結果・数値))

(水星の近日点移動)

(G)一般相対性理論	⇔	(E)電磁気的重力理論
43.03"(100年)		42.9562"(100年)

(太陽近傍通過時の屈折角)

(G)一般相対性理論	⇔	(E)電磁気的重力理論
1.75"		1.7516"

((共通基盤と手法))

(G)一般相対性理論・・・リーマン幾何学をモデル

ミンコフスキー空間の曲がりを用いる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

(マクスウェルのテンソルから・・・電磁気学)

(E)電磁氣的重力理論・・・電磁氣力をモデル

反ドジッタ空間(接空間がミンコフスキー空間)を用いる。

$$\begin{pmatrix} F_t \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}^- = \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} q \\ \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix}^- \quad \begin{matrix} \text{(クーロン・} \\ \text{ローレンツ力)} \end{matrix}$$

((手法と流れ))

(G)一般相対性理論

ミンコフスキー空間 $\Rightarrow$ テンソル(曲がり) $\Rightarrow$ アインシュタイン
の方程式 $\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}\right)$
 $\Rightarrow$ メトリック・運動方程式 $\Rightarrow$ 数値の算出

(E)電磁気的重力理論

ミンコフスキー空間 $\Rightarrow$ 電磁気力 $\Rightarrow$ 同一形式の重力

$$\begin{pmatrix} F_t \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ メトリック・運動方程式 $\Rightarrow$ 数値の算出(反ドジッタ空間)

((式の類似点))

(1) 時空(メトリックの対応)

シュバルツシルト と ミンコフスキー

(2) 運動方程式(4方向)

時間方向・半径方向・緯度方向・経度方向

(3) 主方程式(軌道の決定)

惑星・光

(1)時空(メトリックの対応)

$$d'ct = \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} dct \leftrightarrow dct \text{ と } d'r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} dr \leftrightarrow dr$$

でメトリックが対応する。

(G)一般相対性理論(シュバルツシルト メトリック)

$$ds^2 = -d'ct^2 + d'r^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

(E)電磁気的重力理論(ミンコフスキー メトリック)

$$ds^2 = -dct^2 + dr^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

(2)運動方程式(4方向)

(G) 運動方程式・・・この式を変形する

$$(G1) \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = - \frac{\frac{2M_G}{r^2}}{1 - \frac{2M_G}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right)$$

$$(G2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{r^2} \left(1 - \frac{2M_G}{r} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right)^2 + \frac{\frac{M_G}{r^2}}{1 - \frac{2M_G}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)$$

$$(G3) \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = - \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$(G4) \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = - \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau}$$

(2)₁運動方程式(時間方向)

$$(G1) \rightarrow (G1)' \Leftrightarrow (E1)$$

$$\begin{aligned} (G1)' \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right) &= \frac{\frac{2M_G}{r^2}}{2\sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right) + \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} \frac{d^2ct}{d\tau^2} \\ &= - \frac{M_G}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(E1) \frac{d^2ct}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right)}$$

(2)₂運動方程式(半径方向)

$$(G2) \rightarrow (G2)' \Leftrightarrow (E2)$$

$$\begin{aligned} (G2)' \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) &= - \frac{\frac{2M_G}{r^2}}{2(1 - \frac{2M_G}{r}) \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \frac{d^2 r}{d\tau^2} \\ &= - \frac{M_G}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (E2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{\underline{r^2}} \left(\frac{dct}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{\underline{r}} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right\}$$

(2)₃運動方程式(緯度方向)

$$(G3) \rightarrow (G3)' \Leftrightarrow (E3)$$

$$\begin{aligned} (G3)' \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) \\ = \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) - 2 \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) + \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{(real)} = -\frac{1}{\underline{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) + \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

(2)₄運動方程式(経度方向)

$$(G4) \rightarrow (G4)' \Leftrightarrow (E4)$$

$$\begin{aligned}
 (G4)' & \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \\
 &= \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \\
 & \quad + r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) - 2 \sin \theta \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) - 2r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \\
 &= -\frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) - \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) \\
 &\Leftrightarrow (E4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)_{(real)} = -\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) - \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)
 \end{aligned}$$

運動方程式(2のまとめ)

(G)' $\Leftrightarrow$ (E)

$$(G1)' \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right) = - \frac{M_G}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E1) \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right)$$

$$(G2)' \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) = - \frac{M_G}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'ct}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow (E2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right\}$$

$$(G3)' \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) = - \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) + (\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau}) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{(real)} = - \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right) + (\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau}) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

$$(G4)' \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) = - \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2M_G}{r}}} \left(\frac{d'r}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) - (\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau}) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow (E4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)_{(real)} = - \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) - (\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau}) \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)$$

(3)主方程式(軌道を決定する)

$d_1(G)$ 一般相対性理論

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\phi}\right)^2 = -\frac{c^2}{G_1^2} + \frac{C_0^2}{C^2} + \frac{2M_G c^2}{C^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + 2M_G \frac{1}{r^3}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M_G}{r}}} \frac{d\frac{1}{r}}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{2M_G}{r}} \left\{ \frac{C_0^2}{C^2} - \frac{c^2}{C^2} \left(1 - \frac{2M_G}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M_G}{r}\right) \right\}$$

$$= -\frac{c^2}{C^2} + \frac{C_0^2}{C^2} \frac{1}{1-\frac{2M_G}{r}} - \frac{1}{r^2}$$

(E)電磁気的重力理論

$$d\Phi = \sqrt{(\cosh \Omega d\phi)^2 - (d\Omega)^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-2\frac{M_G}{r}}}} \frac{d\frac{1}{r}}{d\Phi}\right)^2 = \left(-\frac{c^2}{C^2} + \frac{C_0^2}{C^2} \frac{1}{e^{-2\frac{M_G}{r}}} - \frac{1}{r^2}\right) e^{2\frac{M_G}{r}}$$

((参考))

運動方程式(電磁氣的重力理論)

$$(E1) \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(\frac{dct}{d\tau}\right)$$

$$(E2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right\}$$

$$(E3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right) + \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right) \\ - i \frac{M_G}{r^2} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right) \frac{dct}{d\tau}$$

$$(E4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right) - \left(\cos \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right) \\ + i \frac{M_G}{r^2} \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right) \frac{dct}{d\tau}$$

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~takemoto/genko.html>