

題名

“相對論的單位系” (電荷・電流と磁荷)

日本文理大学

機械電氣工学科 竹本義夫・島元世秀

目次

A.電荷と電流は独立しているか？

B.電荷と磁荷との関係は？

A.電荷と電流は独立しているか？

(1)電荷間の力

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{Coulomb})$$

(2)電流間の力

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \quad (\text{Ampere} \cdot \text{Biot-Savart})$$

- [本来は、](1),(2)の式で電荷・電流は独立。
- [現在は、]電流間の力(2)で電流・電荷を定義。³

(電流間の力と電荷量(C)の定義)

(1)アンペア(A)の現在の定義 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (N / A^2 = H / m)$

$$2 \times 10^{-7} \text{ [N] } = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2}{l_{[m]}} l_{[m]} \quad (\text{Ampere} \cdot \text{Biot-Savart})$$

(2)電荷量(C)の定義と電荷間の力

$$q_{[C]} = I_{[A]} \cdot t_{[s]}, \quad F \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{Coulomb})$$

***現在の定義ではクーロン定数は定義値であり、実測値ではない。**

電荷・電流

(1)電流の概念の見直し・四元電流

$$d\vec{\rho} = d\rho_0(\gamma, \gamma\beta)_{[C]} \mathbf{u}_{[m/s]} = \frac{dx_{[m]}}{d\tau_{[s]}} \text{ で移動すると } \mathbf{I}_{[A]} = Q_{[C]} / 1_{[s]}$$

(2)総体(en-bloc) ・ ・ 荷電流 (反変ベクトル)

$$\vec{\rho}_{[C/m^3]} = \begin{bmatrix} \rho \\ -\frac{\mathbf{j}_s}{c} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \rho_0 \gamma \\ -\rho_0 \gamma \frac{\mathbf{u}}{c} \end{bmatrix}^+, \mathbf{j}_{[A/m^2]} = \mathbf{I}_{[A]} \cdot \mathbf{v}_{[m/s]} \cdot 1_{[s]} / \mathbf{V}_{[m^3]}$$

***慣れない人は斜めに見てください。**

荷電流の電場・磁場

(1)ポテンシャル

$${}^+ \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix} {}^+ = {}^+ \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 \gamma_1}{r} \\ -\frac{\rho_0 \gamma_1 \boldsymbol{\beta}_1}{r} \end{bmatrix} {}^+ = {}^+ \begin{bmatrix} \frac{\rho_1}{r} \\ -\frac{\mathbf{J}_{s1}}{cr} \end{bmatrix} {}^+$$

(2)電場・磁場

$${}^- \begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - i c \mathbf{B} \end{bmatrix} {}^+ = {}^- \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} {}^+ \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix} {}^+ = {}^- \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{J}_{s1} \cdot \mathbf{r}}{cr^3} \\ \frac{\rho_1 \mathbf{r}}{r^3} - i \frac{\mathbf{J}_{s1} \times \mathbf{r}}{cr^3} \end{bmatrix} {}^+$$

荷電流の相互作用

(1) 力 = 電磁場 × 粒子の速度

$$\begin{bmatrix} f_t \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - i c \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 \gamma_2 \\ \rho_0 \gamma_2 \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{J}_{s1} \cdot \mathbf{r}}{c r^3} \rho_2 \\ + \left(\frac{\rho_1}{r^3} - i \frac{\mathbf{J}_{s1} \times \mathbf{r}}{c r^3} \right) \cdot \frac{\mathbf{J}_{s2}}{c} \\ -\frac{\mathbf{J}_{s1} \cdot \mathbf{r}}{c r^3} \frac{\mathbf{J}_{s2}}{c} \\ + \left(\frac{\rho_1}{r^3} - i \frac{\mathbf{J}_{s1} \times \mathbf{r}}{c r^3} \right) \rho_2 \\ - i \left(\frac{\rho_1}{r^3} - i \frac{\mathbf{J}_{s1} \times \mathbf{r}}{c r^3} \right) \times \frac{\mathbf{J}_{s2}}{c} \end{bmatrix}$$

(2) 力の空間成分

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\rho_1 \mathbf{r}}{r^3} \right) \rho_2}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\left(\frac{\mathbf{J}_{s1} \times \mathbf{r}}{c r^3} \right) \times \frac{\mathbf{J}_{s2}}{c}}_{\text{Biot-Savart}} - \frac{\mathbf{J}_{s1} \cdot \mathbf{r}}{c r^3} \frac{\mathbf{J}_{s2}}{c} - i \left(\frac{(\mathbf{J}_{s1} \times \mathbf{r}) \rho_2}{c r^3} + \frac{\rho_1 (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{s2})}{c r^3} \right) \right\}$$

***電荷・電流の定義は関連している。(結論)**

電荷間・電流間の力

(1) $\rho_1 = \rho_2, \mathbf{J}_{s1} = \mathbf{J}_{s2}$ のとき

$$f_t = 0, \quad f = \frac{\rho_1 \rho_2 \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{J}_{s1} \cdot \mathbf{J}_{s2}}{c^2 r^3}$$

(2) 1. 電荷が止まっている(かつ導体の中)

$\mathbf{J}_{s1} = \mathbf{J}_{s2} = \mathbf{0}$ ∴ 電荷の効果(中和)のみ

2. 導体の中を流れているとき

$\rho_1 = \rho_2 \doteq 0$ ∴ 電流の効果のみが現れる

***1.2.のどちらで測定しても構わない。**

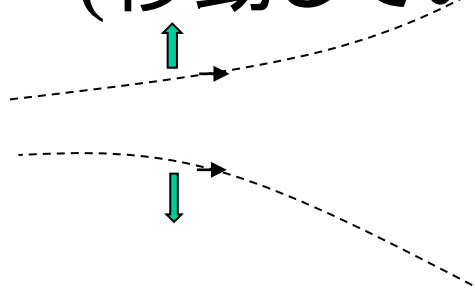
(電子ビームと電流)

(1)電子ビーム

(止まっているとき)



(移動しているとき)

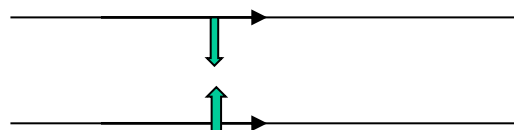


(2)電流

(流れてないとき)



(流れているとき)



(ついでに・・・)

*時間軸 ct と空間軸 x は対等である。

(1)電流 $I_{[A]} = Q_{[C]} / t_{[s]}$... c 倍

$\Rightarrow$ 四元電流 $(\rho, \frac{\mathbf{J}}{c})$

(2)運動量 $P_{[m/s]} = m_{[kg]} \frac{dx_{[m]}}{dt_{[s]}} = m\beta c$... c 倍

エネルギー $E_{[kg \cdot m^2 / s^2]} = f_{[kg \cdot m / s^2]} \cdot l_{[m]} = mc^2$... c^2 倍

$\Rightarrow$ 四元運動量 $(\frac{E}{c}, \mathbf{P})$

は光の速度 c を含む。

B.電荷と磁荷との関係は？

(4)電荷間の力

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{Coulomb})$$

(5)磁荷間の力(E-H対応)

$$F = \frac{q_{m1} q_{m2}}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \left(= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{m2}}{c\mu_0} \frac{q_{m1}}{c\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (\text{Gauss})$$

- 磁荷の存在は立場によって異なっている。
- (4),(5)の式で電荷・磁荷は独立。

虚電荷の導入

(1)複素電荷の導入

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \rho + i\rho' \\ 0 \end{bmatrix}^+, \quad \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \frac{\rho + i\rho'}{r} \\ 0 \end{bmatrix}^+$$

(2)虚電荷(純虚数の電荷)

$$\vec{q}_m = \begin{bmatrix} i\rho_1' \\ 0 \end{bmatrix}^+, \quad \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} i\frac{\rho_1'}{r} \\ 0 \end{bmatrix}^+$$

虚電荷の磁場・力

(1) 電場・磁場

$$\begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - i\mathbf{cB} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \phi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ i\frac{\rho_1' \mathbf{r}}{r^3} \end{bmatrix}^+$$

(2) 力 = 電磁場 × 粒子の速度

$$\begin{bmatrix} f_t \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}^- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - i\mathbf{cB} \end{bmatrix}^+ \overline{\begin{bmatrix} i\rho_2' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^-} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho_1' \rho_2' \mathbf{r}}{r^3} \end{bmatrix}^-$$

虚電荷の相互作用

(1) 虚電荷間の力 $\phi = i \frac{\rho_1'}{r}, \quad -ic\mathbf{B} = i \frac{\rho_1' \mathbf{r}}{r^3}$

$$\mathbf{f} = \frac{\rho_1' \rho_2'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -i \frac{1}{4\pi} \rho_2' \cdot \left[i \frac{\rho_1' \mathbf{r}}{r^3} \right] = -i \frac{1}{4\pi} \rho_2' \cdot [-ic\mathbf{B}]$$

(2) 磁荷間の力 $\phi(\mathbf{r}) = -i \frac{q_{m1}}{c\mu_0 r}$

$$\mathbf{F} = \frac{q_{m1} q_{m2}}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m2}}{c\mu_0} \cdot \left[-i \frac{q_{m1}}{c\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] = i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m2}}{c\mu_0} \cdot [-ic\mathbf{H}(\mathbf{r})]$$

$$-ic\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i \frac{q_{m1}}{c\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{grad} \left(-i \frac{q_{m1}}{c\mu_0} \frac{1}{r} \right) = -\mathbf{grad} \phi(\mathbf{r})$$

虚電荷と磁荷の比較

(1)虚電荷と磁荷

$$q' \Leftrightarrow -\frac{q_m}{c\mu_0}$$

(2)虚電荷と磁荷のポテンシャル

$$\phi = i \frac{q'}{r} \Leftrightarrow \phi(\mathbf{r}) = -\frac{iq_m}{c\mu_0 r}$$

(3)虚電荷と磁荷の磁場

$$-ic\mathbf{B} = i \frac{q'}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \Leftrightarrow -ic\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{iq_m}{c\mu_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(磁荷の単位)

$$(1) \varepsilon_{0[s/m]} = \frac{1}{c}, \mu_{0[s/m]} = \frac{1}{c} \text{ とすると}$$

$$q'_{[C]} = -\frac{q_m}{c\mu_0} = -q_{m[C]}$$

(2) 磁荷のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \vec{q} &= - \begin{bmatrix} i q_m & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ \\ \vec{\phi} &= \begin{bmatrix} \phi & \\ & -c\mathbf{A} \end{bmatrix}^+ = - \begin{bmatrix} i \frac{q_m}{r} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = - \begin{bmatrix} i q_m & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ \end{aligned}$$

(全微分)

(1) 相对論的全微分

$$\begin{aligned}
 d \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-+} &= \begin{bmatrix} dct \\ d\mathbf{r} \end{bmatrix}^{-} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-+} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} dct \\ d\mathbf{r} \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{bmatrix}^{+} = - \begin{bmatrix} d\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ -i d\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{bmatrix}^{+}
 \end{aligned}$$

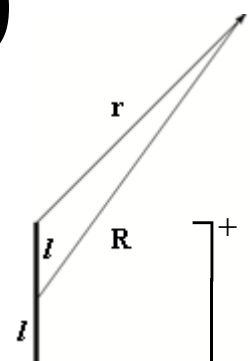
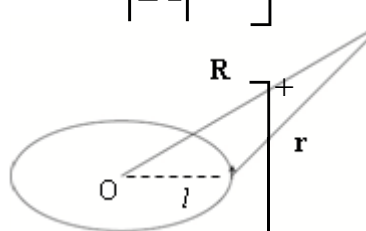
ダイポール(ポテンシャル)

(相対論的全微分による。)

(1) 磁荷ダイポール... $\mathbf{m} = -2q_m l$

$${}^+ \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix} = {}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ -i\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -i \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \\ -\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{bmatrix}$$

(2) ループダイポール... $\mathbf{m} = \frac{|I|}{2c} \oint \mathbf{s} \times d\mathbf{s}$

$${}^+ \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix} = {}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ -i\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -i \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \\ -\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{bmatrix}$$



*二重下線は従来の部分。

(磁荷とループダイポールの対応)

磁荷とループダイポールはそれぞれ

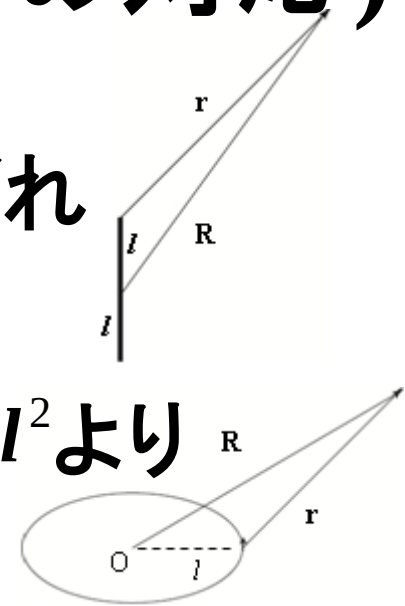
$$(1) \mathbf{m}_{[\mathbf{C} \cdot \mathbf{m}]} = -2q_m l$$

$$(2) \mathbf{m}_{[\mathbf{C} \cdot \mathbf{m}]} = \frac{|\mathbf{I}|}{2c} \oint \mathbf{l} \times d\mathbf{l} = \frac{|\mathbf{I}|}{2c} 2\pi l^2 = \frac{|\mathbf{I}|}{c} \pi l^2$$

$$-2q_m l (= \mathbf{m}) = \frac{|\mathbf{I}|}{c} \pi l^2$$

$$\therefore q_m = -\frac{|\mathbf{I}|}{2c} \pi l$$

の関係がある。(結論)



ダイポール(磁場)

(1)(2) 磁荷・ループダイポールの磁場は

$$\begin{aligned}
 {}^-\left[\begin{array}{c} -icB_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{array} \right]^+ &= {}^-\left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right]^- {}^+\left[\begin{array}{c} i \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \\ \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{array} \right]^+ \\
 &= {}^-\left[\begin{array}{c} 0 \\ i\text{grad} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - i\text{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{array} \right]^+ = {}^-\left[\begin{array}{c} 0 \\ i[\mathbf{m} \cdot \text{grad}] \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{array} \right]^+
 \end{aligned}$$

(参考・相対論的全微分1)

$$\begin{aligned}
 d^+ \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix}^+ &= \left(\begin{matrix} + \begin{bmatrix} dct \\ -d\mathbf{r} \end{bmatrix}^+ \begin{matrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix}^- \end{matrix} \right) + \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix}^+ \\
 &= \begin{bmatrix} + \left[\underline{\underline{\delta ct \frac{\partial}{\partial ct} + \delta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}}} \right. \\ \left. - \delta ct \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \delta \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial ct} - i \delta \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right]^- \begin{bmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{bmatrix}^+
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

*二重下線は従来の部分。

(相対論的全微分2)

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \underline{\underline{(\delta c t \frac{\partial \phi}{\partial c t} + \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} \phi)}} \\
 & + (\delta c t \mathbf{div} \mathbf{cA} + \delta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{cA}}{\partial c t}) \\
 & + i(\delta \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \cdot \mathbf{A}
 \end{aligned} \right] \\
 = & \left[\begin{aligned}
 & \underline{\underline{-(\delta c t \frac{\partial \mathbf{cA}}{\partial c t} + (\delta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \mathbf{cA})}} \\
 & - \{ \delta c t \mathbf{grad} \phi + \delta \mathbf{r} \frac{\partial \phi}{\partial c t} + i \delta \mathbf{r} \times \mathbf{grad} \phi \} \\
 & - i \{ \delta c t \mathbf{rot} \mathbf{cA} + \delta \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{cA}}{\partial c t} + i(\delta \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \times \mathbf{cA} \}
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

*二重下線は従来の部分。

(ついでに・・・)

(1)磁荷とループのダイポールは同じ

$$\begin{bmatrix} -icB_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{bmatrix}^+ = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ i[\mathbf{m} \cdot \text{grad}] \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{bmatrix}^+$$

(2)従来考えられているより2倍の磁場を発生する。

(3)ランデの g-ファクタは粗々「1」である。

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~takemoto/genko.html>