

題名

“プランク定数とボルツマン定数”

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫・島元世秀

目次 $(kT = h\nu)$

1. 島元関係式

$$k_{[J/\underline{K}]}(\text{ボルツマン 定数}) = \frac{h(\text{プランク 定数})}{ec} \quad [J \cdot \underline{s^2} / (C \cdot m)]$$

2. 温度と光の振動数

$$T(\text{温度})_{[K]} = ec \frac{d \log \gamma \beta}{2\pi d\tau} \quad [C \cdot \underline{m/s^2}] \quad (= ec \cdot \nu) \quad , \nu(\text{振動数}) = \frac{d \log \gamma \beta}{2\pi d\tau} \quad [1/s]$$

(1.島元関係式)

プランク定数 $h = 6.626070040 \times 10^{-34} J \cdot s$

電子の電荷 $e = 1.6021766208 \times 10^{-19} C$

光の速度 $c = 2.99792458 \times 10^8 m / s$ より

$$\begin{aligned} \frac{h}{ec} &= \frac{6.626070040 \times 10^{-34} J \cdot s}{(1.6021766208 \times 10^{-19} C) \times (2.99792458 \times 10^8 m / s)} \\ &= \underline{\underline{1.37951 \times 10^{-23} J \cdot s^2 / (C \cdot m)}} \end{aligned}$$

(島元関係式2)

プランク定数/(ec) $\frac{h}{ec} = \underline{\underline{1.37951 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{s}^2 / (\text{C} \cdot \text{m})}}$

とボルツマン定数 $k = \underline{\underline{1.38064852 \times 10^{-23} \text{ J} / \text{K}}}$ より

$$k_{[J/\underline{\underline{K}}]} = \frac{h}{ec_{[\underline{\underline{J \cdot s^2 / (C \cdot m)}}]}} \quad (\text{島元関係式})\text{を得る。}$$

ここで、温度 K は電荷 e の 加速度的変化
 $[C \cdot m / s^2]$ である。

(島元関係式3)

(気体の状態方程式)

$$(E =) pV = \underline{nRT} (\textcolor{red}{n} \text{モル})$$

$$\Rightarrow pV = \underline{RT} = \underline{kN_A T} (n = 1, \textcolor{red}{1} \text{モル})$$

$$\Rightarrow pV = \underline{kT} (1 / N_A, \text{原子} \textcolor{red}{1} \text{個}) = \frac{h}{\textcolor{red}{ec}} \textcolor{red}{T} (= h\textcolor{red}{\nu})$$

(島元関係式)

(ここで、 $\textcolor{red}{R} = kN_A \cdots$ 気体定数 、 $\textcolor{red}{N_A} \cdots$ アボガドロ数)

(2.温度と光の振動数)

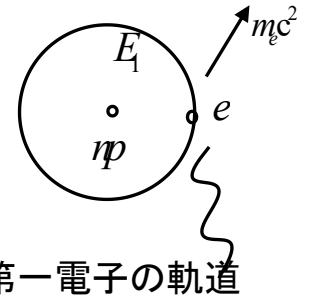
A. (1)基底状態にある**最外殻**の電子の角運動量も h である?

(2)全ての原子殻内の電子は**同一角運動量**
(**プランク定数 h**)の下で運動している。(仮説)

B. (1)原子と原子の**衝突で熱が出る**。

(2)**温度** K は電荷 e の**加速度的変化** ($C \cdot m / s^2$)
であり、光の**振動数** (ν) $\times ec$ である。

(A. 第一電子の角運動量)



***イオン化**エネルギー(I.E.) [kJ / mol]

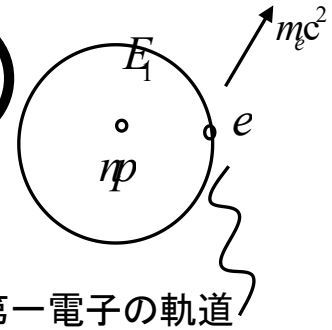
= 電子軌道から**飛び出す**のに必要なエネルギー
(第一電子の角運動量・・・ **n** －プロトン)

kJ / mol

$$(1) \frac{m_e v^2}{r} = \frac{nk_0 e^2}{r^2} \cdots \text{つり合い(円軌道)}$$

$$\therefore r \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{nk_0 e^2}{m_e c^2} (= \underline{\underline{nR_0}}) \quad , R_0 = \frac{k_0 e^2}{mc^2}$$

(第一電子の角運動量2)



また、**基底状態**のエネルギー準位

$$(2) E_1 = \underbrace{\frac{1}{2}m_e v^2}_{\text{運動エネルギー}} - \underbrace{\frac{nk_0 e^2}{r}}_{\text{ポテンシャル}} = \frac{nk_0 e^2}{2r} - \frac{nk_0 e^2}{r} = -\frac{\textcolor{red}{n}k_0 e^2}{2r}$$

と

$$I.E.(\text{資料}) = N_A E_1 / 1000 \text{ [kJ/mol]}$$

$$= (\text{H})1312.0, (\text{He}) 5250.3, (\text{Li})11814.7, (\text{Be})21006.6$$

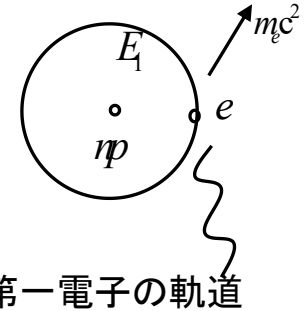
$$= 1312.0 \times \underline{\textcolor{red}{1}}, 1312.0 \times \underline{\textcolor{red}{4}}, 1312.0 \times \underline{\textcolor{red}{9}}, 1312.0 \times \underline{\textcolor{red}{16}}$$

$$\text{より、} \frac{\textcolor{red}{n}k_0 e^2}{2r} = \frac{k_0 e^2}{2r_1} (= 1312.0 \text{ [kJ/mol]}) \times \textcolor{red}{n}^2 \therefore r = \frac{r_1}{\textcolor{red}{n}}$$

(第一電子の角運動量3)

(1)より

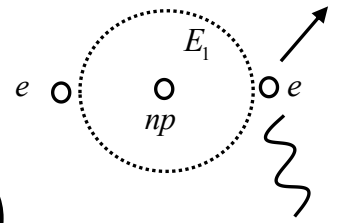
$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{nR_0}{r}} = \sqrt{\frac{n^2 R_0}{r_1}} = n \sqrt{\frac{R_0}{r_1}} = n \frac{v_1}{c}$$



このとき、**第一電子の角運動量は全ての原子で一定である**。 $\cdots [m_e r v = m_e \frac{r_1}{n} (n v_1) = m_e r_1 v_1 = \hbar]$
 また、I.E.の計算値は資料と粗々一致する。

I.E.(計算) = (H)1312.7, (He)5250.8, (Li)11814.3, (Be)21003.2

I.E.(資料) = (H)1312.0, (He)5250.3, (Li)11814.7, (Be)21006.6



(第二電子の角運動量)

第二電子の軌道

(第二電子の角運動量・・・ n -プロトン)

$$(1) \frac{m_e v^2}{r} = \frac{nk_0 e^2}{r^2} - \frac{k_0 e^2}{(2r)^2}$$

・・・**つり合い**(円軌道)

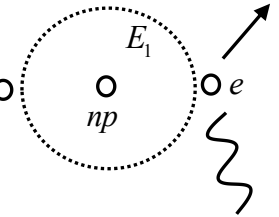
$$(2) (*\text{重要}) m_e r v = m_e r_1 v_1 (= \hbar)$$

・・・**第二電子の角運動量一定**(仮説)

(1),(2)より

$$r = \frac{4}{4n-1} r_1, v = \frac{4n-1}{4} v_1 \quad \text{となる。}$$

(第二電子の角運動量2)



第二電子の軌道

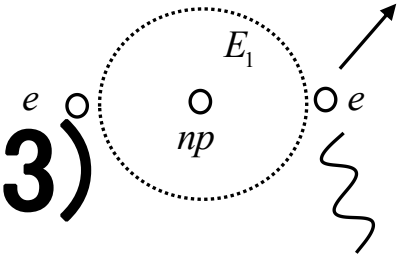
このとき、**第二電子**のイオン化エネルギー $[kJ / mol]$ は

$$E_2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} e^{-\frac{nk_0 e^2}{m_e c^2 r^2} + \frac{k_0 e^2}{m_e c^2 (2r)^2}} \quad [J] \quad \text{より、}$$

$$I.E(\text{計算}) = (\text{He})2871.3, (\text{Li})8120.1, (\text{Be})15990.0$$

$$I.E(\text{資料}) = (\text{He})2372.3, (\text{Li})7298.0, (\text{Be})14848.7$$

(第二電子の角運動量3)



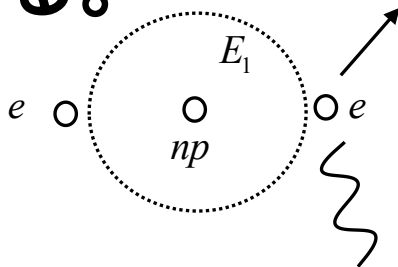
第二電子の軌道

計算値と資料のイオン化エネルギー [kJ / mol]

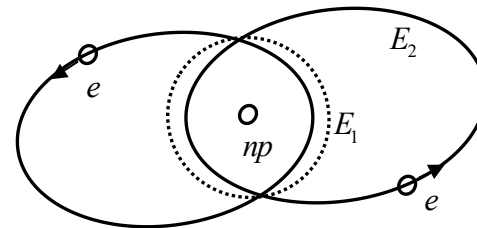
$I.E(\text{計算}) = (\text{He})2871.3, (\text{Li})8120.1, (\text{Be})15990.0$

$I.E(\text{資料}) = (\text{He})2372.3, (\text{Li})7298.0, (\text{Be})14848.7$

の値は、**第二電子**軌道が同一の円ではなく
twinの楕円軌道とすると**一致**させることが
できる。

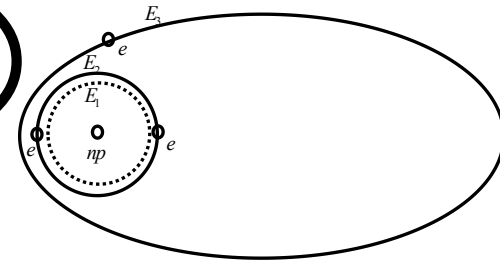


第二電子の軌道



第二電子の軌道(修正)

(第三電子の軌道)

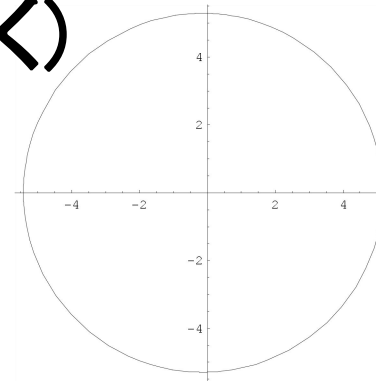


第三電子の軌道

(資料から電子軌道を描く)

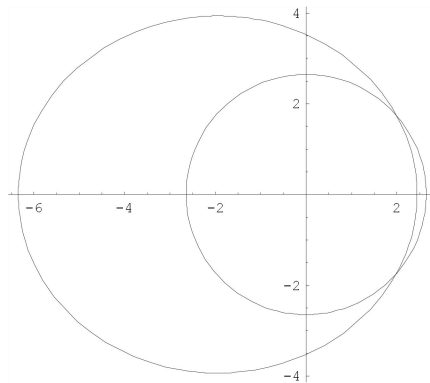
(i)水素

$$I.E(\text{資料}) = [\text{H}]1312.0$$

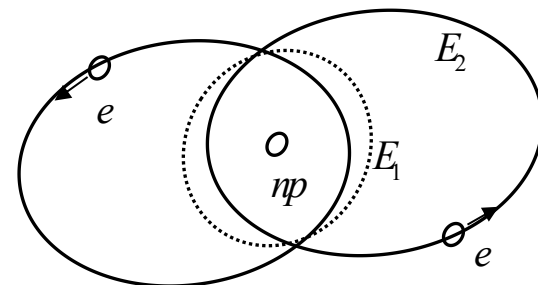


(ii)ヘリウム・・・外側の電子がない場合の軌道

$$I.E(\text{資料}) = [\text{He}]5250.3, 2372.3$$

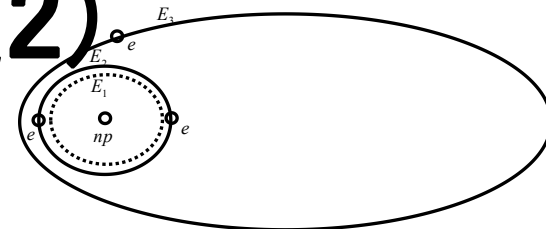


=



現実の軌道(ツイン)

(第三電子の軌道2)



第三電子の軌道

(資料から電子軌道を描く)

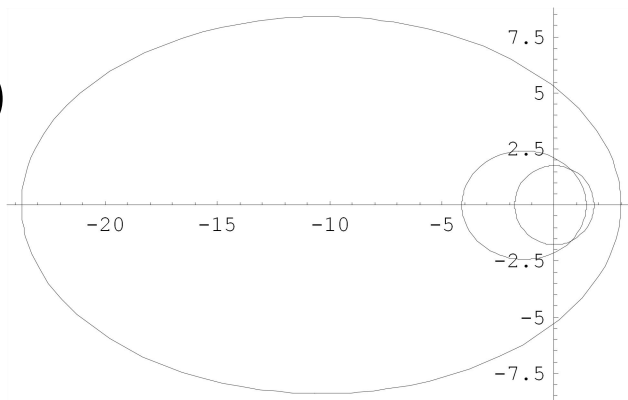
(iii) リチウム・・・外側の電子がない場合の軌道

$$I.E(\text{資料}) = [\text{Li}] 11815, 7298.1, 520.2$$

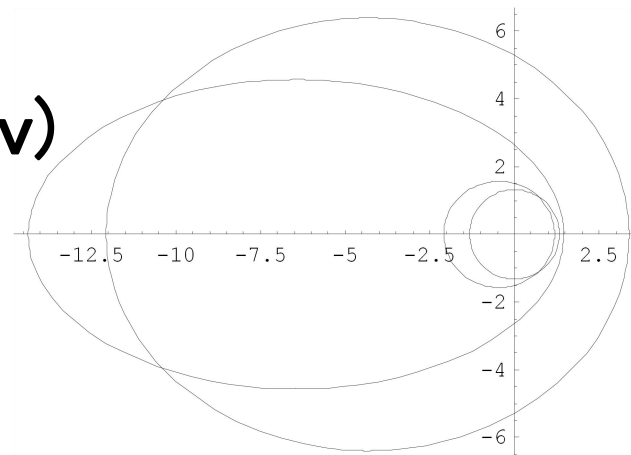
(iv) ベリリウム・・・外側の電子がない場合の軌道

$$I.E(\text{資料}) = [\text{Be}] 21006.6, 14848.7, 1757.1, 899.5$$

(iii)

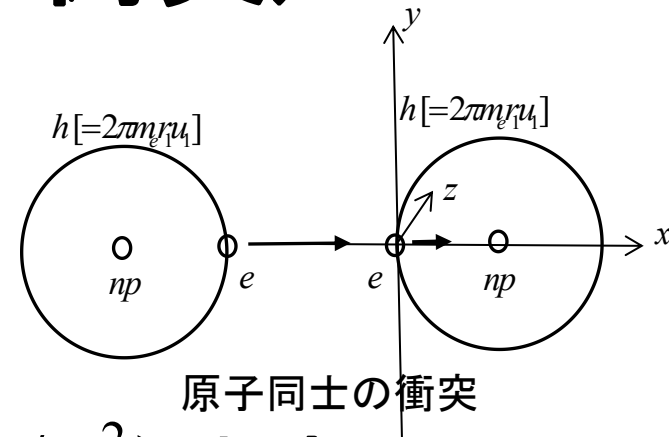


(iv)



(B. 原子と原子の衝突)

(角運動量を**変化**させる)
島元関係式



$$k_{[J/\underline{K}]} = \frac{h}{ec_{[J \cdot \underline{s^2} / (C \cdot m)]}} \quad (K = C \cdot m / s^2) \text{より}$$

$$E = pV = \underline{kT}(\text{原子 } \mathbf{1} \text{ 個}) = \frac{h}{\underline{ec}} T \quad (= h\nu)$$

(島元関係式)

*ここで、**温度** K は電荷 e の**加速度的変化**。

(原子と原子の衝突2)

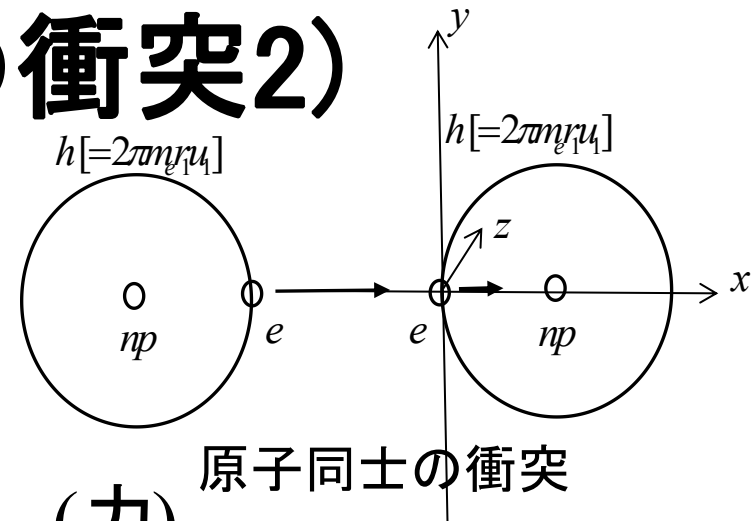
(**電場**Eによる運動量**変化**)

$$\left(m_{e[kg]} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{dr}{d\tau} \end{bmatrix} \right)_{[kgm/s^2]} \text{ (力)}$$

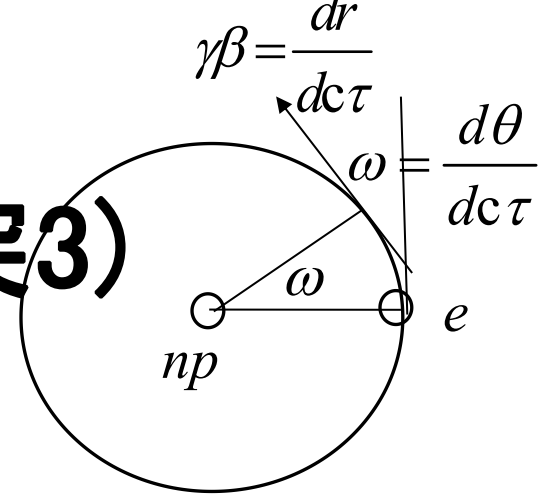
$$= \begin{bmatrix} E_t \\ E - icB \end{bmatrix}^+ \cdot \frac{e_{[C]}}{c_{[m/s]}} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{dr}{d\tau} \end{bmatrix}^-$$

加速量($\vec{E}$) $[kgm/(Cs^2)]$

***電場**(加速量)が加速度を生じさせる。



(原子と原子の衝突3)



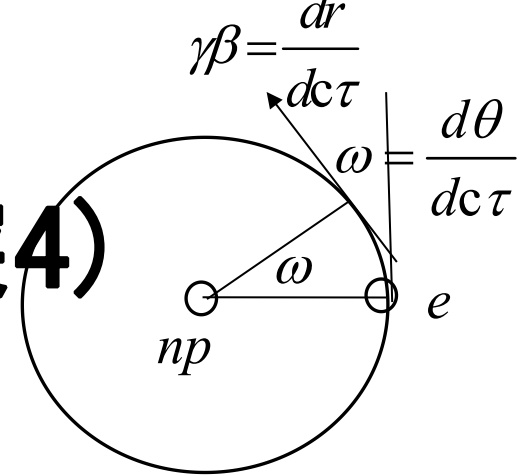
(運動量**変化**よる振動)

$$\underbrace{\frac{d}{d\tau} \left[\frac{dr}{d\tau} \right]}_{\text{加速度}} = \underbrace{\left[\frac{E_{[s]}}{\text{加速量} \vec{E}} \cdot \frac{e}{m_e c} \right]}_{[s]}^+ \underbrace{\left[\frac{dr}{d\tau} \right]}_{\text{速度}}^-, \quad \frac{dr}{d\tau} = (\gamma\beta)_y$$

速度・角速度

$$\begin{aligned} \therefore \underbrace{\left[E_{[s]} \frac{e}{m_e c} \right]}_{[s]}^+ &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{dr}{d\tau} \right]_{[m/s^2]}^- \cdot \left[\frac{dr}{d\tau} \right]_{[s/m]}^{-,-1} \\ &= \frac{d(\gamma\beta)_x}{(\gamma\beta)_y d\tau}, \quad \left[\frac{dr}{d\tau} \right]_{\text{初期値}}^- = \left[(\gamma\beta)_{17}^y \right]^- \end{aligned}$$

(原子と原子の衝突4)



速度・角速度

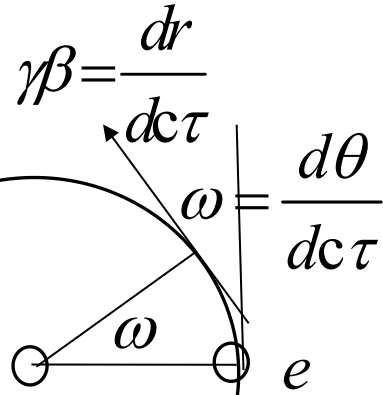
$$\frac{d(\gamma\beta)_x}{d\tau}, ((\gamma\beta)_y \cdot \omega =) \frac{(\gamma\beta)_y^2}{r} = \frac{k_0 e^2}{m_e c^2 r} \dots \text{円軌道(つり合い)}$$

よって、

$$\omega_0 = \frac{d(\gamma\beta)_x}{(\gamma\beta)_y d\tau} \doteq \frac{d\gamma\beta}{\gamma\beta d\tau}, \gamma\beta = ((\gamma\beta)_x, (\gamma\beta)_y, -i(\gamma\beta)_x \cdot (\gamma\beta)_y)$$

$$\therefore \left| \vec{E} \right|_{[kgm/(Cs^2)]} \frac{e}{m_e c} = \frac{d(\gamma\beta)_x}{(\gamma\beta)_y d\tau_{[s]}} \doteq \frac{d\gamma\beta}{\gamma\beta d\tau} = \frac{d \log \gamma\beta}{d\tau}$$

(原子と原子の衝突5)



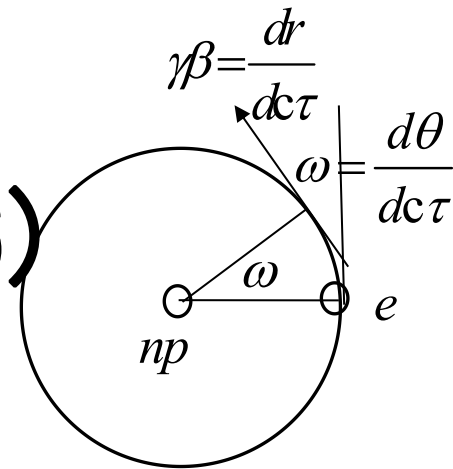
$$\begin{aligned}
 & \text{(温度の定義)} \\
 E = pV_{[kgm^2/s^2]} &= \frac{h_{[kgm^2/s]} T_{[K]}}{e_{[C]} c_{[m/s]}} \\
 &= \frac{h_{[kgm^2/s]}}{e_{[C]} c_{[m/s]}} \left(\frac{e_{[C]} c_{[m/s]}^k}{2\pi} \frac{d(\gamma\beta)_x}{(\gamma\beta)_y d\tau_{[s]}} \right) \text{速度} \cdot \text{角速度}
 \end{aligned}$$

よって、**温度は振動数により定まり、**

$$T_{[K]} = \frac{e_{[C]} c_{[m/s]} T}{2\pi} \frac{d(\gamma\beta)_x}{(\gamma\beta)_y d\tau_{[s]}} \doteq e_{[C]} c_{[m/s]} \frac{d \log \gamma\beta}{2\pi d\tau_{[s]}}$$

である。

(原子と原子の衝突6)



速度・角速度

(温度と振動数)

$$T_{[K]} = e_{[C]} c_{[m/s]} \frac{d \log \gamma \beta}{2\pi d\tau} \quad = e_{[C]} c_{[m/s]} v_{[1/s]}$$

ここで、 $v_{[1/s]} = \frac{d \log \gamma \beta}{2\pi d\tau} \quad$ よって、

$$E(\text{エネルギー}) = pV_{[kgm^2/s^2]}$$

$$= \underline{kT}(\text{原子 } 1 \text{ 個}) = \frac{h}{ec} T = h_{[kgm^2/s]} v_{[1/s]}$$

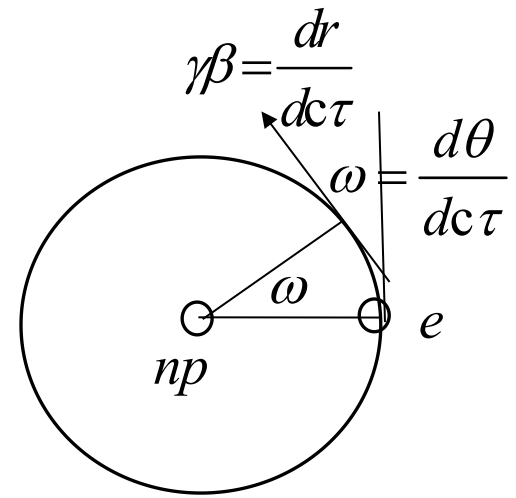
(Example)

$$E = pV_{[kgm^2/s^2]} = \frac{h_{[kgm^2/s]}}{e_{[C]}c_{[m/s]}} T_{[K]}$$

$$= 2\pi m_e \textcolor{red}{ru}_{[kgm^2/s]} \cdot \frac{\textcolor{red}{dlog}\gamma\beta}{2\pi d\tau_{[s]}}$$

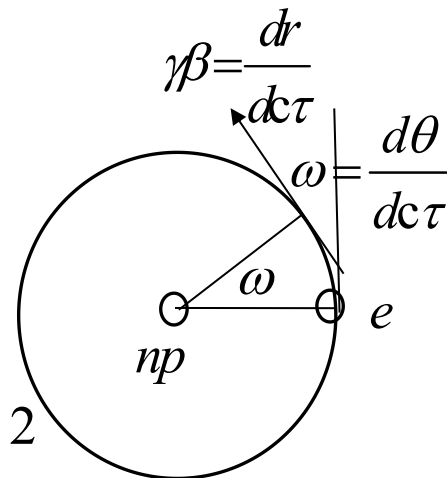
$$\frac{dE}{\underline{\underline{d\tau}}_{[kgm^2/s^3]}} = 2\pi m_e \frac{\textcolor{red}{dr}}{\underline{\underline{d\tau}}_{[s]}} u_{[kgm^2/s^2]} \cdot \frac{d\gamma\beta}{2\pi\gamma\beta d\tau_{[s]}}$$

$$= m_e c^2 (\gamma\beta)_x_{[kgm^2/s^2]} \cdot \frac{d(\gamma\beta)_x}{d\tau_{[s]}}$$



速度・角速度

(Example-続き)



$$\frac{dE}{d\tau} \text{ [kgm}^2/\text{s}^3] = \frac{1}{2} m_e c^2 \text{ [kgm}^2/\text{s}^2] \cdot \frac{d(\gamma\beta)_x^2}{d\tau} \text{ [1/s]} \quad \text{速度} \cdot \text{角速度}$$

$$\therefore \dot{E} \text{ [kgm}^2/\text{s}^2] = \frac{1}{2} m_e c^2 \text{ [kgm}^2/\text{s}^2] \cdot (\gamma\beta)_x^2$$

$$\doteq \frac{1}{2} m_e v_x^2 \text{ [kgm}^2/\text{s}^2] \quad (1\text{方向のみ})$$

(参考) 気体分子運動論 $\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ (平均)

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~shimamoto/genko.html>