

題名

“プランク式中の エネルギーと振動数について”

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫・島元世秀

目次

1. プランク関係式(の変形)

$$\Delta E = h_{[kgm^2/s]} \nu_{[/s]} (= h_{s[kgm^2/s^2]} \nu^s_{[-]})$$

2. 軌道シフト

放射光と電子の(周回)振動数の関係

3. 電子の共鳴軌道(ボーア半径)

共鳴軌道シフトで光の振動数決定

(1.プランク関係式)

*光のエネルギーはどこに存在するか？

$$\Delta E_{[kgm^2/s^2]} = h_{[kgm^2/s]} \nu_{[1/s]} \quad , h = 6.62607 \times 10^{-34} [kgm^2/s]$$

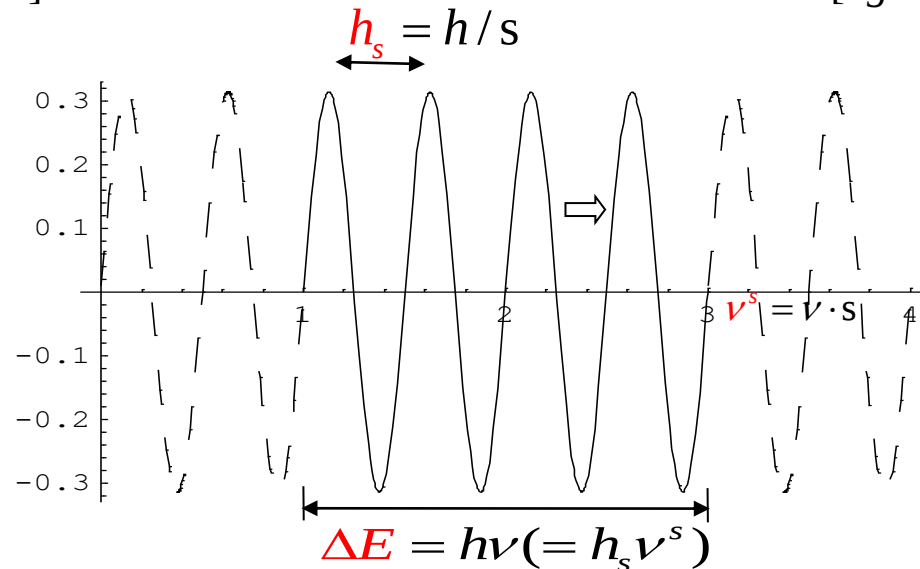
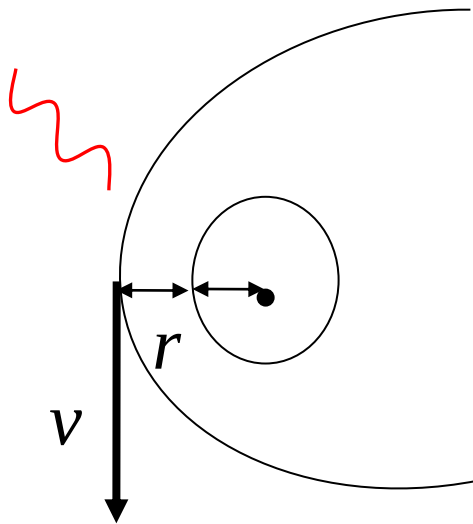


Fig 1. 光のエネルギー(classic).

(問題点)

(i) 光振動 ν の始まりと終わりがはっきりしない。

* 光の波の個数は如何ほどか。

(ii) 光のエネルギーが振動数 ν だけで、振幅との関係がない。

* 光の振幅の大きさは如何ほどか。

(プランク関係式・修正)

$$\begin{aligned}\Delta E_{[kgm^2/s^2]} &= h_{[kgm^2/s]} \nu_{[/s]} \quad , h = 6.62607 \times 10^{-34} \quad [kgm^2/s] \\ &= h_s_{[kgm^2/s^2]} \cdot \nu^s_{[-]} \quad , h_s = \frac{\Delta E}{\nu^s} = 6.62607 \times 10^{-34} \quad [kgm^2/s^2]\end{aligned}$$

ここで、

ν^s は1秒間の振動数の個数であり、
 h_s は1振動(周期 $T_{[s]} = \frac{1}{\nu}$)に要する
 (波1個の)エネルギーと考えると、 ν^s は、1
 振動波の個数(ν^s 倍)を表す。??結論??

(単振動)

(i) エネルギー $h_{s[kgm^2/s^2]}$ をもつ単振動 (振動数 ν) は

$$\omega (= 2\pi\nu) = \sqrt{\frac{k}{m_e}}, \quad k = m_e \omega^2 = m_e (2\pi\nu)^2 \text{ より、}$$

復元力 $f = kx$ 、最大変位は $a = \sqrt{\frac{2h_s}{k}} = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2h_s}{m_e}}$

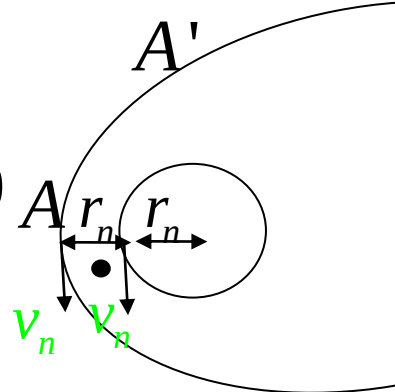
(ii) このとき、最大速度は $v_0 = 2\pi a\nu = \sqrt{\frac{2h_s}{m_e}} = 0.0381416_{[m/s]}$

とエネルギー $h_s = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = 6.62607 \times 10^{-34}_{[kgm^2/s^2]}$ は
振動数 ν に依らない。($v_0 = 2\pi a_n \nu_n$)

(2.軌道シフト)

放物軌道から円軌道(半径 $r_n = n^2 r_1$) へのシフト (r_1 はボーア半径)

(i) 電子の(周回)振動数 at A

$$\bar{\nu}_n = \frac{v_n}{2\pi(2r_n)} = \frac{\frac{1}{2}(2r_n)v_n}{\pi(2r_n)^2} \left(= \frac{\text{面積速度}}{\text{円の面積}} \right)$$


*シフト位置A'により振動数が変わる。
 ... 共鳴で決定される。

(エネルギー)

(ii) シフトエネルギー $\frac{2}{r(\text{共鳴位置})} = \frac{1}{r_{n(\text{終})}} + \frac{1}{r_{m(\text{始})}(=\infty)}$

$$\Delta E_{n[kgm^2/s^2]} (= h_s[kgm^2/s^2] \nu_n^s)$$

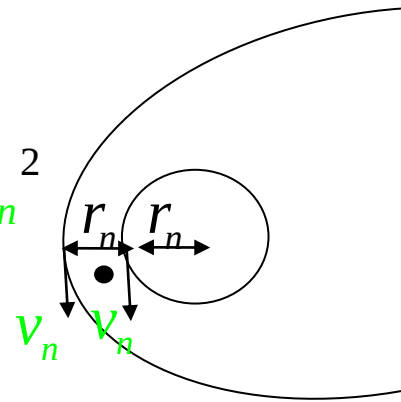
$$= m_e c^2 - \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - (\frac{\nu_n}{c})^2}} e^{-\frac{R_0}{r_n}} \doteq \frac{1}{2} m_e \nu_n^2$$

(単振動)

$$a_n = \frac{1}{2\pi \nu_n} \sqrt{\frac{2h_s}{m_e}} \doteq \frac{1}{2\pi \nu_n} \frac{\nu_n}{\sqrt{\nu_n^s}}$$

・ ・ 最大変位

$$\nu_{r_n,0} = 2\pi a_n \nu_n \doteq \frac{\nu_n}{\sqrt{\nu_n^s}} = \frac{\nu_1}{\sqrt{\nu_1^s}} = \nu_{0[m/s]} \quad \cdot \cdot \text{最大速度 (一定)}$$



(電子シフトの変換 T_n … (i)と(ii))

(iii) シフトエネルギーと電子の(周回)振動数

$$\begin{aligned}\Delta E_n &= h_s \cdot \nu_n^s \left(\doteq \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{1}{2} m_e v_1^2 \times n^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_e v_{r_n,0}^2 \cdot \nu_n^s \\ &= \frac{1}{2} m_e (2\pi a_n \nu_n)^2 \cdot \nu_n^s \\ &= \frac{1}{2} m_e \underbrace{\left(\frac{2\pi(2r_n) \bar{\nu}_n}{v_n} \right)^2}_{\text{周回振動数}} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_n}{2r_n} \right)^2 \left(\frac{\nu_n}{\bar{\nu}_n} \right)^2}_{(T_n)^2} \nu_n^s\end{aligned}$$

9

($T_n=1$ の計算)

(iv) T_n

$$\frac{\frac{a_n}{2r_n} \frac{v_n}{v_n} \sqrt{v_n^s}}{\frac{a_n}{2r_n} \frac{v_n}{v_n} \sqrt{v_n^s}} \doteq \frac{1}{2r_n} \cdot \frac{1}{2\pi v_n \sqrt{v_n^s}} \cdot \frac{v_n}{v_n} \sqrt{v_n^s}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2r_n) v_n}{\pi(2r_n)^2} \cdot \frac{1}{v_n} \left(= \frac{\text{面積速度}}{\text{円の面積}} \cdot \frac{1}{v_n} \right)$$

$\frac{1}{v_n}$ (周回振動数)

$$= 1, \quad \frac{1}{v_n} (\text{電子周回}) = \frac{v_1}{n^3}$$

$$v_n (\text{放射光}) = \frac{v_1}{n^2}$$

(電子シフトと(周回)振動数)

(v) シフトエネルギーと電子の(周回)振動数

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{n[kgm^2/s^2]} &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r_n)\bar{v}_n}{v_n} \right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{a_n}{2r_n} \right)^2 \left(\frac{v_n}{v_n} \right)^2 v_n^s}_{(T_n)=1} \\
 &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r_n)\bar{v}_n}{v_n} \right)^2 \quad \text{周回振動数} \\
 &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r_1)\bar{v}_1}{v_1} \right)^2 \times \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

(放射光と電子の振動数)

(vi) **放射光の振動数と電子の(周回)振動数**

$$\begin{aligned}\Delta E_{n[kgm^2/s^2]} &= \frac{1}{2} m_e \frac{(2\pi(2r_1)\bar{\nu}_1)^2}{n^2} \times \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2\pi m_e r_1 \bar{\nu}_1 \cdot \bar{\nu}_1}{h_{[kgm^2/s]}} \times \frac{1}{n^2} \text{より} \\ \nu_n(\text{光}) &= \bar{\nu}_1(\text{電子周回}) \times \frac{1}{n^2} \\ \therefore \nu_1(\text{光}) &= \bar{\nu}_1(\text{電子周回})\end{aligned}$$

***電子の軌道上の動き $\bar{\nu}_n$ 自体が光の振動数 ν_n に反映する。**

(電子の急激振動・・結論)

(vii) 電子の急激な1振動が光(単一振動)を発生する。急激な1振動の場合

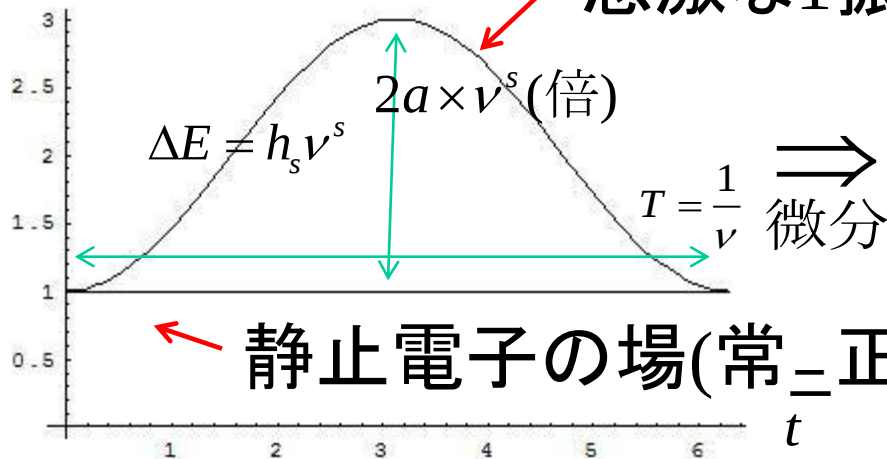


Fig 2. 振動電子の電場

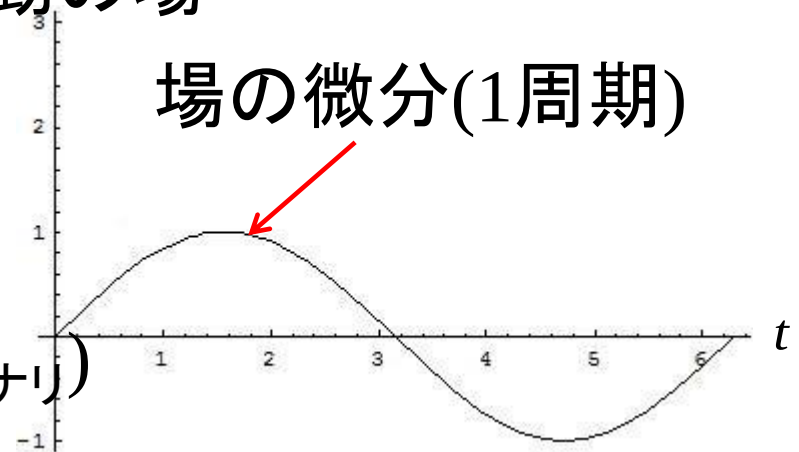
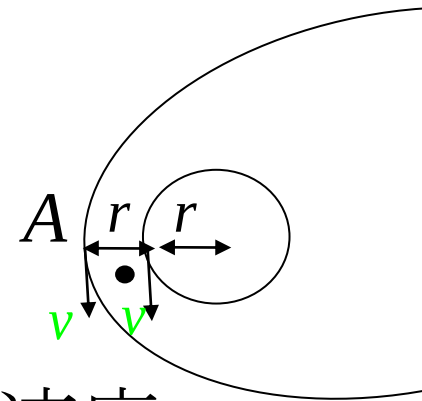


Fig 3. 電場の変化(光)

(3.共鳴)

*任意の半径 r へのシフト

(i) 電子の(周回)振動数 at A



$$\underline{\underline{\bar{\nu} = \frac{v}{2\pi(2r)} = \frac{\frac{1}{2}(2r)v}{\pi(2r)^2} \left(= \frac{\text{面積速度}}{\text{円の面積}} \right)}}$$

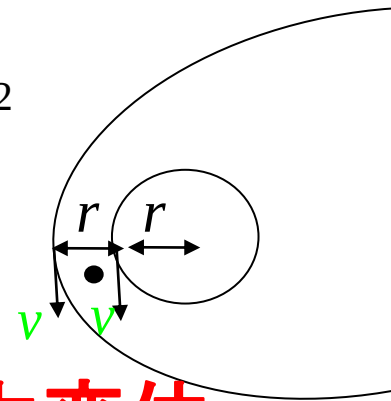
(エネルギー)

$$\Delta E_{[kgm^2/s^2]} (= h_s [kgm^2/s^2] \nu^s [-])$$

$$= m_e c^2 - \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} e^{-\frac{R_0}{r}} \doteq \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$a = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2h_s}{m_e}} \doteq \frac{1}{2\pi\nu} \frac{v}{\sqrt{\nu^s}}$$

・最大変位



$$v_{r,0} = 2\pi a \nu \doteq \frac{v}{\sqrt{\nu^s}} (= \frac{v_1}{\sqrt{\nu_1^s}} = v_{0[m/s]}) \cdot \text{最大速度 (一定)}$$

(電子シフトの変換T・・(i)と(ii))

(iii) シフトエネルギーと電子の(周回)振動数

$$\begin{aligned}\Delta E_{[kgm^2/s^2]} &= h_s \cdot \nu^s (\doteq \frac{1}{2} m_e v^2) \\ &= \frac{1}{2} m_e v_0^2 \cdot \nu^s \\ &= \frac{1}{2} m_e (2\pi a \nu)^2 \cdot \nu^s \\ &= \frac{1}{2} m_e \underbrace{(2\pi(2r)\bar{\nu})^2}_{\text{周回振動数}} \cdot \underbrace{\left(\frac{a}{2r}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right)^2 \nu^s}_{(T)^2}\end{aligned}$$

(T=1の計算)

(iv) $\overline{T}$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{2r} \frac{v}{v} \sqrt{v^s} &\doteq \frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{2\pi v} \frac{v}{\sqrt{v^s}} \frac{v}{v} \cdot \sqrt{v^s} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(2r)v^a}{\pi(2r)^2} \frac{1}{v} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(電子シフトと(周回)振動数)

(v) シフトエネルギーと電子の(周回)振動数

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{[kgm^2/s^2]} &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r)\bar{\nu}}{\nu} \right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2r} \right)^2 \frac{\nu}{\nu} \nu^s \\
 &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r)\bar{\nu}}{\nu} \right)^2 \underbrace{\quad}_{(T)^2=1} \\
 &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r_1)\bar{\nu}_1}{\nu_1} \right)^2 \times \left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^2
 \end{aligned}$$

周回振動数

(放射光と電子の振動数)

(vi)放射光の振動数と電子の(周回)振動数

$$\begin{aligned}\Delta E_{[kgm^2/s^2]} &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r_1)\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_1} \right)^2 \times \left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^2 \\ &= \frac{2\pi m_e r_1 \nu_1}{h_{[kgm^2/s]}} \cdot \bar{\nu}_1 \times \left(\frac{1}{x} \right)^2, \quad x = \frac{\nu_1}{\nu} \\ &= h_{[kgm^2/s]} \cdot \nu_1 \times \frac{1}{x^2}, \quad \nu_1(\text{光}) = \bar{\nu}_1\end{aligned}$$

***電子の軌道上の動き** $\bar{\nu}(\text{周回}) = \frac{\bar{\nu}_1}{x^3}$
自体が光の振動数 ν に反映する。

(Example)

$$(i) \text{ } x = 1 \text{ のとき } \Delta E_1 = \frac{2\pi m_e r_1 v_1 \cdot \textcolor{red}{v}_1}{\textcolor{red}{h}}$$

$$(ii) \text{ } x = 2 \text{ のとき } \Delta E_2 = 2\pi m_e r_1 v_1 \cdot \frac{v_1}{2^2} \\ = \frac{2\pi m_e r_1 v_1 \cdot \textcolor{red}{v}_2}{\textcolor{red}{h}}$$

...

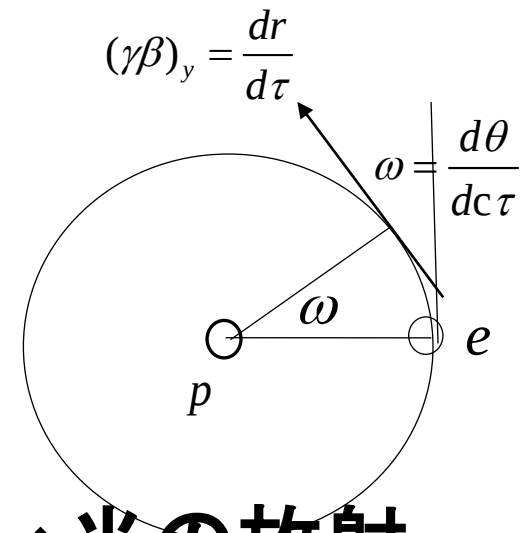
$$(n) \text{ } x = n \text{ のとき } \Delta E_n = 2\pi m_e r_1 v_1 \cdot \frac{v_1}{n^2} \\ = \frac{2\pi m_e r_1 v_1 \cdot \textcolor{red}{v}_n}{\textcolor{red}{h}} (= \frac{2\pi m_e r_n v_n \cdot \textcolor{green}{v}_n}{\textcolor{green}{nh}})$$

Diagram illustrating the geometry of a circle and the relationship between the normal vector and the tangent line. The center of the circle is labeled p . A point e is marked on the circumference. A radius vector connects p to e . A tangent line is drawn at e . The normal vector, pointing away from the circle, is labeled $(\gamma\beta)_y = \frac{dr}{d\tau}$. The angle between the radius vector and the normal vector is labeled ω . The angle between the radius vector and the tangent line is labeled $\omega = \frac{d\theta}{dc\tau}$.

***電場(加速量)は電子に加速を与える。**

$$\frac{e}{m_e c} \frac{d}{d\tau} \left[\begin{matrix} E_0 \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{matrix} \right]^+ = \frac{d}{d\tau} \left[\begin{matrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{dr}{d\tau} \end{matrix} \right]^{-1}$$

(光の発生)



*粒子同士の衝突

⇒ **衝撃的な加速** ⇒ 電場の急変化 ⇒ 光の放射

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{dr}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{dr}{d\tau} \end{bmatrix}^{-,-1}, \quad \gamma\beta = ((\gamma\beta)_x, (\gamma\beta)_y, -i(\gamma\beta)_x \cdot (\gamma\beta)_y)$$

$$= \frac{d(\gamma\beta)_x}{d\tau} \frac{1}{(\gamma\beta)_y} (= \frac{d \log(\gamma\beta)}{d\tau}) = 2\pi\nu_n = \omega_n(\text{光}) \left[\Leftrightarrow \frac{v}{2\pi r} = \frac{\frac{dr}{d\tau}}{2\pi r} = v (= \frac{\omega}{2\pi}) \right]$$

空間成分

$$(v_n = \frac{v_n}{2\pi(2r_n)} = \frac{\frac{1}{2}(2r_n)v_n}{\pi(2r_n)^2} = \frac{\text{Speed of area}}{\text{Area of circle}})$$

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~shimamoto/genko.html>

(参考1)光と粒子のエネルギー・運動量

h :プランク定数、 $\mathbf{v}$:粒子の速度

(1)エネルギーと振動数

$$E(\text{光}) = h\nu \neq \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}}{c})^2}} = E'(\text{粒子})$$

(2) 運動量と波長

$$P(\text{光}) = \frac{h}{\lambda} \sim \frac{m_e \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}}{c})^2}} = P(\text{粒子})$$

(参考2)周回振動エネルギー(E')

(1) 周回振動エネルギーと振動数

$$E' = \frac{m_e c^2 \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} (= h\nu) = P\mathbf{v}$$

(2) 運動量と波長

$$P = \frac{m_e c \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} (= \frac{h}{\lambda})$$

(参考3)角運動量と周回振動数

(1) 角運動量(粒子)

$$E_0 = \frac{m_e r \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}}{c})^2}}$$

(2) 速度と(周回)振動数(粒子)

$$\nu = \frac{\mathbf{v}(\text{速度})}{2\pi r(\text{周長}\lambda)} = \frac{\frac{1}{2} r \mathbf{v}(\text{面積速度})}{\pi r^2(\text{面積})}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{v}(\text{速度}) = 2\pi r(\text{周長}\lambda) \cdot \nu \quad (\text{ド・ブロイ})$$