

題名

“ボア半径の内側”

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫・島元世秀

$$r_1 = 5.29177 \times 10^{-11} \text{ (ボーア半径)}$$

目次

1. ボーア共鳴(水素原子)・既出
 $\bar{\nu}_{[s]}$ (周回振動) と $\nu_{[s]}$ (光・電子振動)
一致で共鳴が起こる。

2. 運動方程式・既出

Maxwell方程式から運動方程式へ

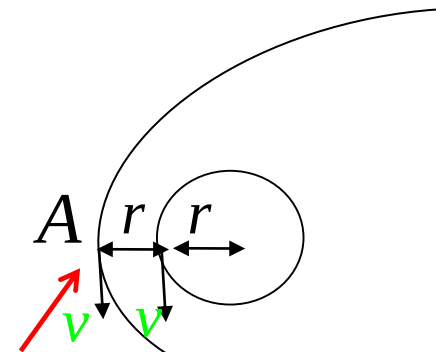
3. 花びら共鳴(中性子?)  $2R_0 = 5.63588 \times 10^{-15}$
(電子[古典]半径×2)

$2R_0$ の近くで5/4共鳴が起きる。

(1)ボーア共鳴(水素原子)・既出

*任意の半径 r へのシフト

(i) 電子の(周回)振動数 at A



*ここで、共鳴するときシフトする。

$$\underline{\underline{\bar{v} = \frac{v}{2\pi(2r)} = \frac{\frac{1}{2}(2r)v}{\pi(2r)^2} \left(= \frac{\text{面積速度}}{\text{円の面積} } \right)}}$$

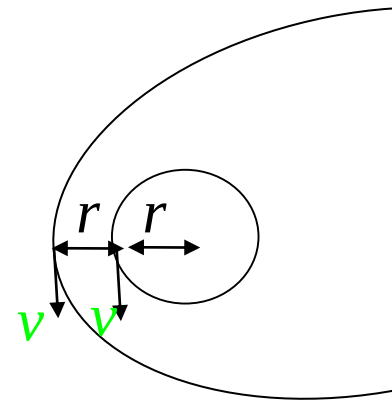
(シフトエネルギー)

$$\Delta E_{[kgm^2/s^2]}$$

$$= \underbrace{m_e c^2}_{\text{放物線}} - \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} e^{-\frac{R_0}{r}}$$

$$\doteq \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r)\bar{v}}{v} \right)^2$$



エネルギー関数

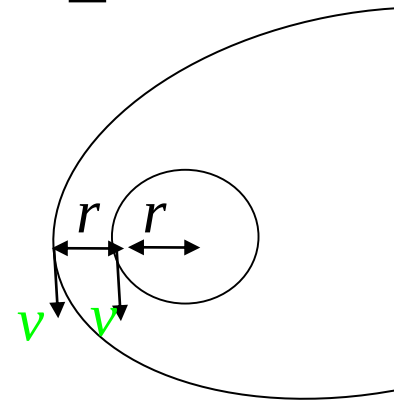
(共鳴)

$$\Delta E_{[kgm^2/s^2]} = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{2\pi(2r)\bar{v}}{v} \right)^2 = \frac{1}{2} m_e v \cdot 2\pi(2r)\bar{v}$$

また、

$$\Delta E_{[kgm^2/s^2]} = h_{[kgm^2/s]} \nu_{[s]} \text{ より}$$

$$\frac{\nu_{[s]}(\text{光} \cdot \text{電子振動})}{\bar{\nu}_{[s]}(\text{周回振動})} = \frac{2\pi r m_e v}{h_{[kgm^2/s]}} = 1, 2, 3 \cdots, n$$



で共鳴する。

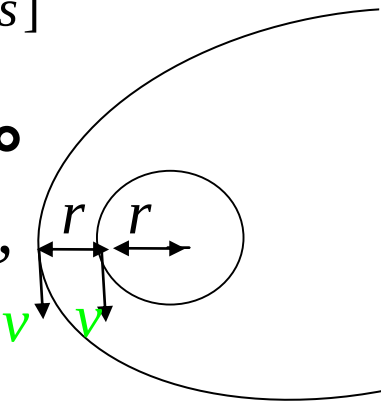
(共鳴の**最小半径**)

$$\frac{\nu_{[s]}(\text{光} \cdot \text{電子振動})}{\bar{\nu}_{[s]}(\text{周回振動})} = \frac{2\pi r m_e \nu}{h_{[kgm^2/s]}} = 1, 2, 3 \dots, n$$

で共鳴する。

(i) $n=1$ のとき (最小半径) $\bar{\nu}_1 = \nu_1$,

$$r = \frac{h^2}{(2\pi)^2 m_e k_0 e^2} = 5.2923 \times 10^{-11} (= r_1)$$



は**ボーア半径**。

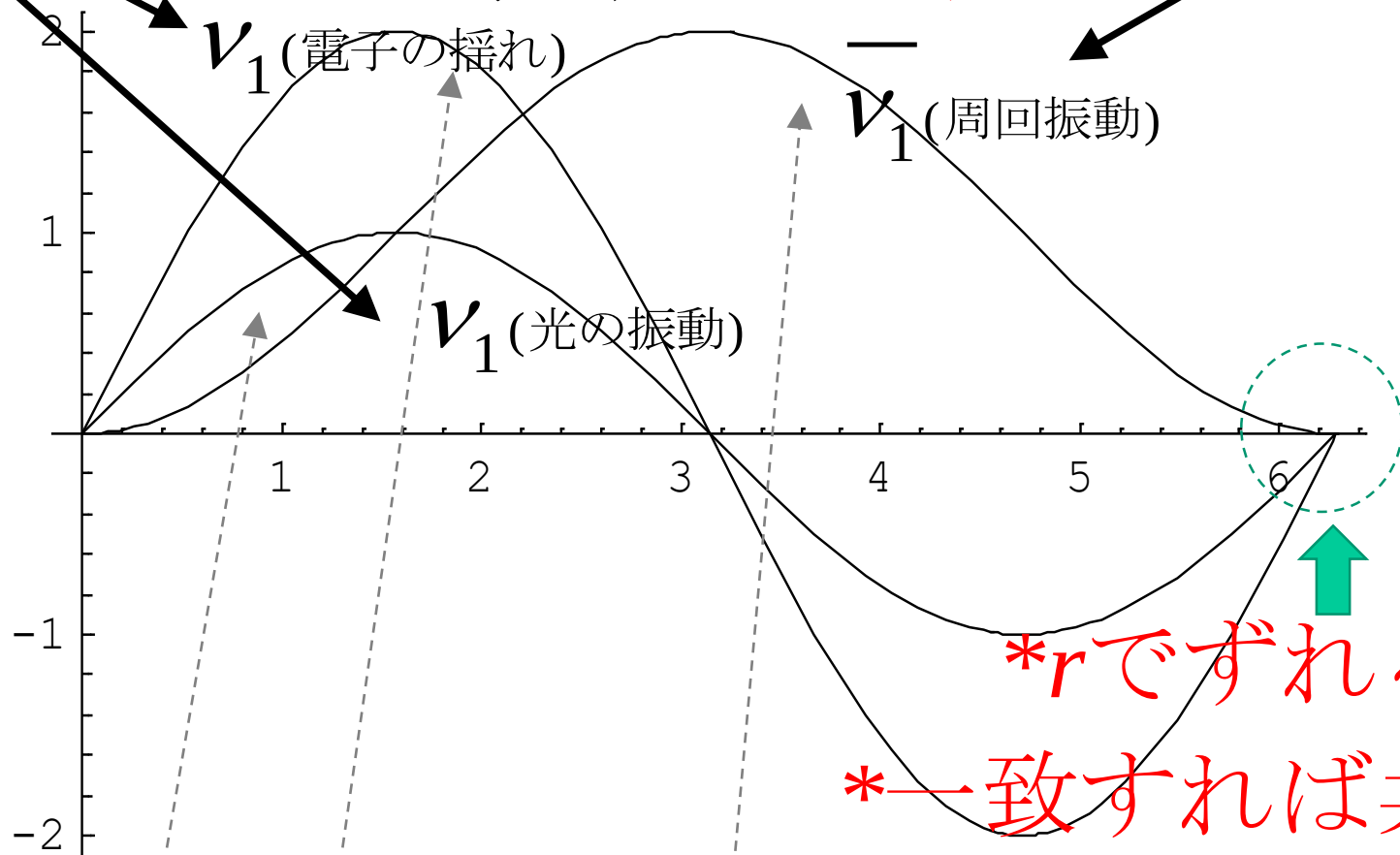
(ii) $n=2, 3, \dots$ のとき

$$\bar{\nu}_n = \frac{\nu_n}{n}, \quad r_n = \frac{(nh)^2}{(2\pi)^2 m_e k_0 e^2} (= n^2 r_1)$$

$\frac{1}{n^2}$ で変化

(振動の一致)

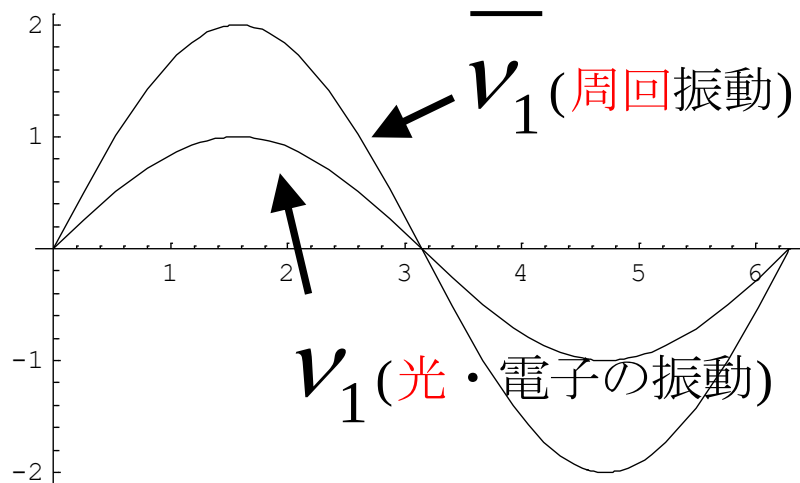
$\frac{1}{n^3}$ で変化



$\sin x, 1 - \cos x, 2 \sin 2x$ at $0 \leq x \leq 2\pi$

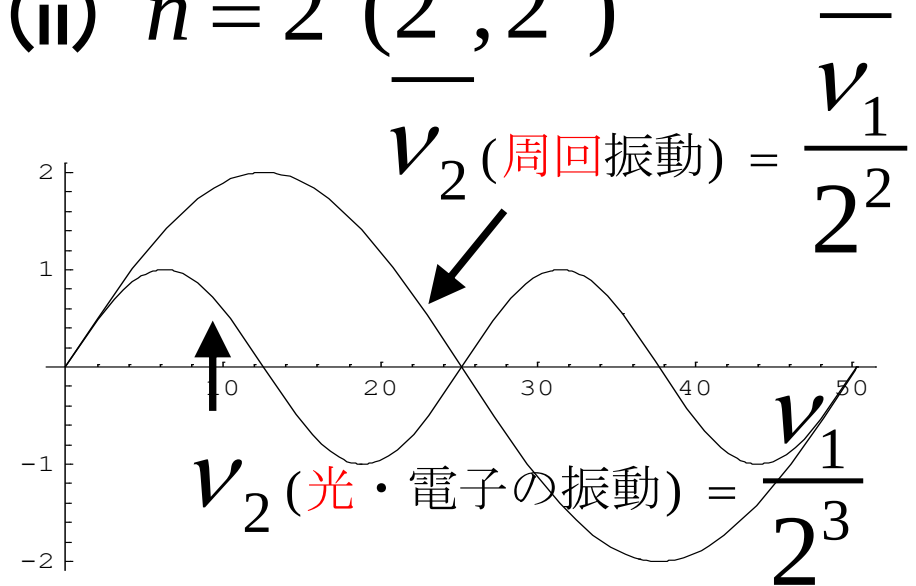
(共鳴図)

(i) $n = 1$ ($1^3, 1^2$)



$\sin x, 2 \sin 2x$ at $0 \leq x \leq 2\pi$

(ii) $n = 2$ ($2^3, 2^2$)



$\sin \frac{x}{2^2}, 2 \sin \frac{x}{2^3}$ at $0 \leq x \leq 2\pi \times 2^3$

(2)Maxwell(運動)方程式・既出

(i) Maxwell方程式($E - icB$ 空間成分)

→

(ii)Maxwell(拡張)方程式(時間成分を含む)

→

(iii)四元力(時間・空間)

→

(iv) Maxwell(運動)方程式

Maxwell(**拡張**)方程式

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{E_t}} = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div} c\mathbf{A} \text{ (時間成分)} \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} = -\frac{\partial c\mathbf{A}}{\partial ct} - \mathbf{grad} \phi - i\text{rot} c\mathbf{A} \text{ (空間成分)} \end{array} \right.$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) + \frac{\partial E_t}{\partial ct} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (時間成分)} \\ \frac{\partial(\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i\text{rot}(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) + \mathbf{grad} E_t = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c} \text{ (空間成分)} \end{array} \right.$$

四元力($E_t = 0$ ・実部分)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t = \frac{\partial}{\partial ct} \left(\frac{k_0 e}{r} \right) = \underline{\underline{0}} \quad \leftarrow \text{(静止) 電荷} \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} = \mathbf{grad} \left(\frac{k_0 e}{r} \right) = - \frac{k_0 e}{r^2} \underline{\underline{\frac{\mathbf{r}}{r}}} \end{array} \right.$$

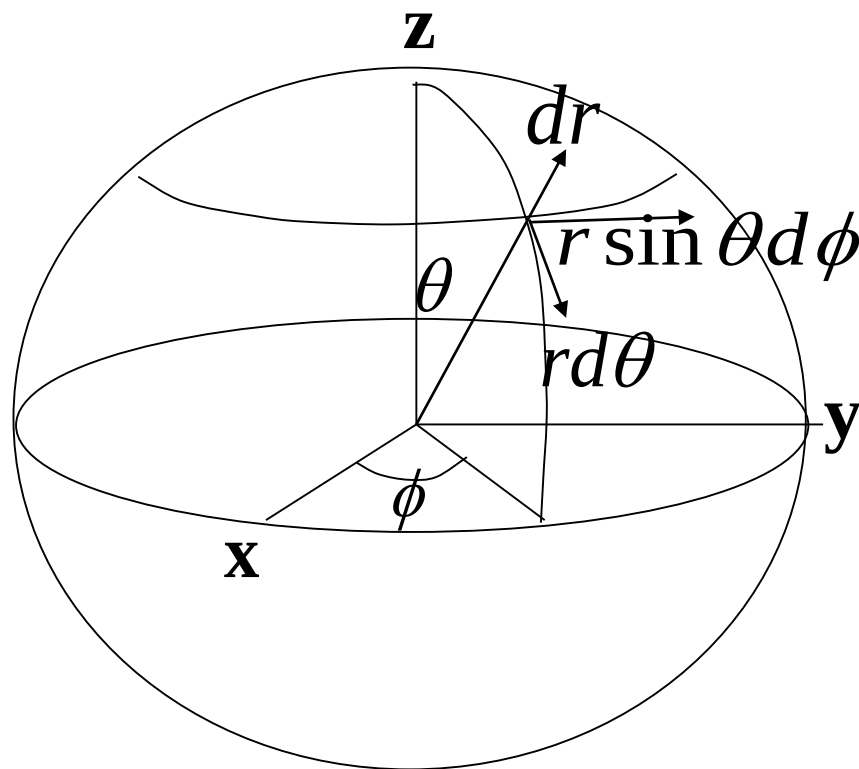
を代入して

エネルギーの変化

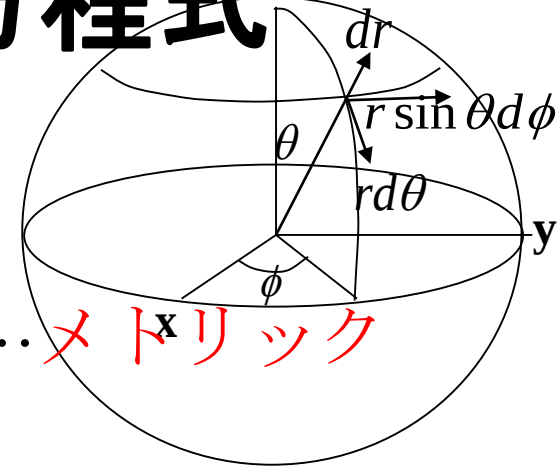
$$\left\{ \begin{array}{l} f_{t \text{ real}} = E_t \rho + \underline{\underline{\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_s}{c}}} = - \frac{k_0 e}{cr^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot Q \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad \text{クーロン力} \\ \underline{\underline{\mathbf{f}_{\text{real}}}} = E_t \frac{\mathbf{j}_s}{c} + \underline{\underline{\mathbf{E} \rho}} - c\mathbf{B} \times \frac{\mathbf{j}_s}{c} = - \frac{k_0 e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} Q \frac{dct}{d\tau} \end{array} \right.$$

(球面座標系)

$$\left\{ \begin{array}{l} (ct = ct) \\ x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right.$$



Maxwell(運動)方程式^z



球面座標を用いると、

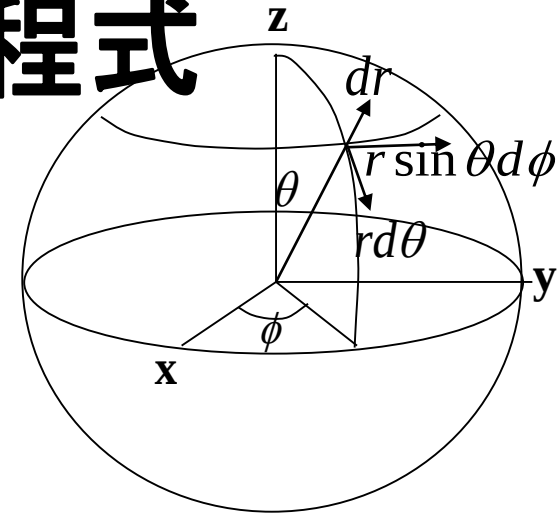
$$ds^2 = -dct^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \dots \text{メトリック}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \dots \text{(時間方向加速度)} \\ (2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right\} \dots \text{(動径方向加速度)} \\ (3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{real} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \cdot r \frac{d\theta}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdot r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \dots \text{(緯度方向加速度)} \\ (4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)_{real} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \cdot r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdot r \frac{d\theta}{d\tau} \dots \text{(経度方向加速度)} \end{array} \right.$$

主方程式と軌道方程式

主方程式(メトリックと同値)

$$\left(\frac{dr}{dc\tau}\right)^2 = \left(\frac{C_0}{c} e^{\frac{R_0}{r}}\right)^2 - \left(\frac{C}{cr}\right)^2 - 1$$



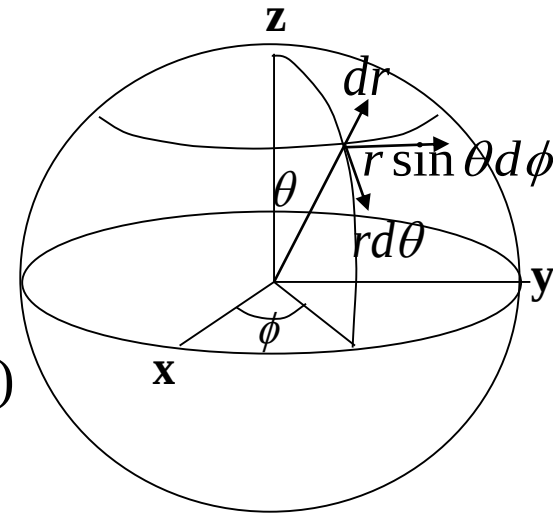
軌道方程式(本論)

$$\frac{dr}{d\theta} \left(= \frac{dr}{e^{-\frac{R_0}{r}} d\Phi}\right) = -r \sqrt{-1 + r^2 \frac{C_0^2}{C^2} e^{\frac{2R_0}{r}} - r^2 \frac{C^2}{C^2} e^{\frac{R_0}{r}}}$$

主方程式

(1. 時間) より $\frac{d}{d\tau} \text{Log} \frac{dct}{d\tau} = \frac{d \frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r}}{d\tau}$

$$\therefore \text{Log} \frac{dct}{d\tau} = \frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r} + c_0 \quad \therefore \frac{dct}{d\tau} = C_0 e^{\frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r}} (= C_0 e^{\frac{R_0}{r}})$$



(3, 4. 緯度・経度) より

$$(r^2 \frac{d\Phi}{d\tau})^2 = (r^2 \frac{d\theta}{d\tau})^2 + (r^2 \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau})^2 = C^2 (\text{一定})$$

よって、(2. 動径) より、主方程式

$$\underline{\underline{(\frac{dr}{dc\tau})^2 = (\frac{C_0}{c} e^{\frac{R_0}{r}})^2 - (\frac{C}{cr})^2 - 1}} \quad , \quad R_0 = \frac{keQ}{m_e c^2} \doteq 2.81795 \times 10^{-15} \text{m.}$$

を得る。

軌道方程式

主方程式

$$\left(\frac{dr}{dc\tau}\right)^2 = \left(\frac{C_0}{c} e^{\frac{R_0}{r}}\right)^2 - \left(\frac{C}{cr}\right)^2 - 1 \quad \text{は}$$

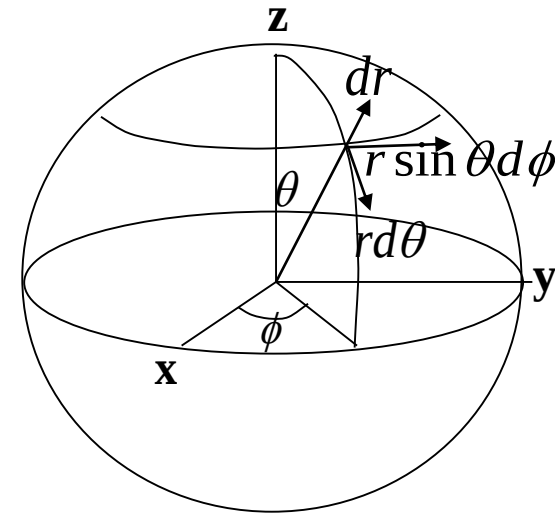
メトリック

$$ds^2 (= -dc\tau^2) = -dc\tau^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

よりと同値であり、軌道方程式

$$\frac{dr}{d\theta} \left(= \frac{dr}{\frac{R_0}{e^{\frac{R_0}{r}} d\Phi}} \right) = -r \sqrt{-1 + r^2 \frac{C_0^2}{C^2} e^{\frac{2R_0}{r}} - r^2 \frac{C^2}{C^2} e^{\frac{R_0}{r}}}$$

を導く。



3.花びら共鳴(中性子?)

軌道方程式

$$\frac{dr}{d\theta} (= \frac{dr}{\frac{-R_0}{e^{-r}} d\Phi}) = -r \sqrt{-1 + r^2 \frac{C_0^2}{C^2} e^{\frac{2R_0}{r}} - r^2 \frac{C^2}{C_0^2} e^{\frac{R_0}{r}}}$$

をエネルギー最小の円軌道 $r = 2R_0$
 のエネルギーとバランスによる定数 $C_0 = 2.5715 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、
 $C = 1.6896 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (*自転なしは存在しない)
 を用いて解くと自転を持つ軌道(複素軌道)を得る。

$$r = -\frac{2.8179 \times 10^{-15}}{R_0} + \frac{1.4090 \times 10^{-14}}{1 + 0.5668 i \sin 1.1180 \theta}$$

$$1.1180^2 (= 1.25) = \frac{5}{4}$$

実軌道

実軌道は

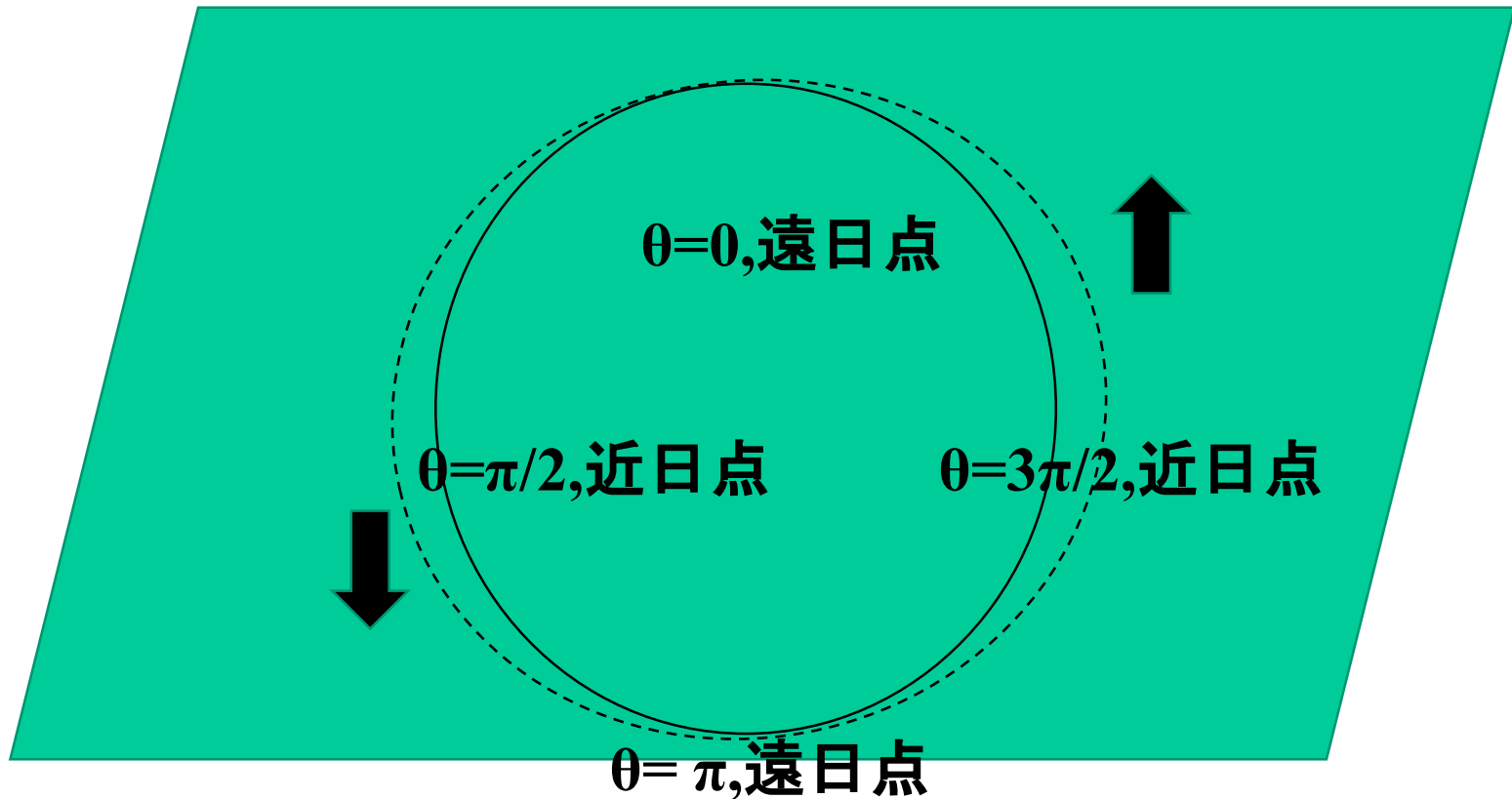
$$r = -2.8179 \times 10^{-15} + \frac{1.4090 \times 10^{-14}}{1 + 0.5668 i \sin(1.1180\theta)} \text{ より}$$

$$r = -2.8179 \times 10^{-15} + \frac{1.4090 \times 10^{-14}}{1 + 0.3212 \sin^2(1.1180\theta)}$$

$$= -2.8179 \times 10^{-15} + \frac{1.21339 \times 10^{-14}}{1 - 0.1384 \cos(\underline{\underline{1.1180\theta \times 2}})}$$

*虚軌道で1周すると実軌道で電子は2周(?)する。

虚軌道と実軌道

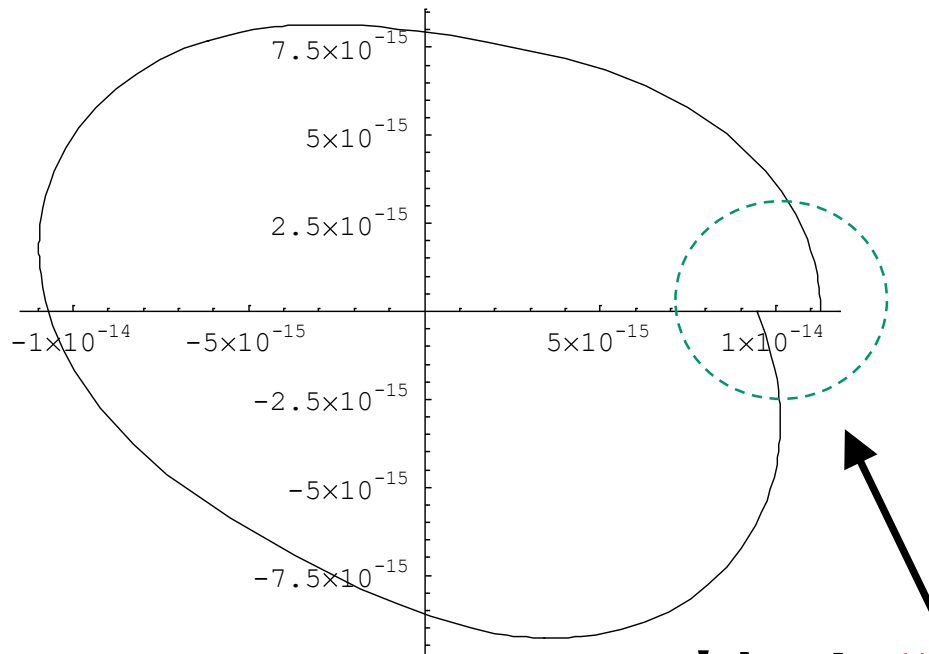


19

*円軌道にならないのは、**自転の効果**による。

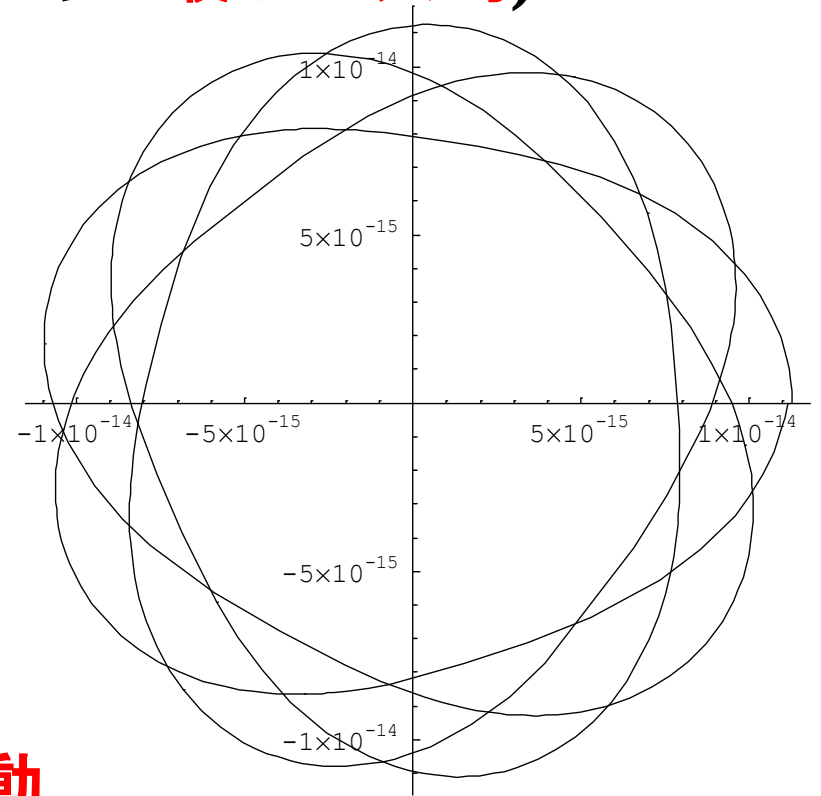
実軌道(図)

***5/4共鳴**($2R_0 \sim r_1$ でエネルギー最小の共鳴)



$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

***極点移動**



$$0 \leq \theta \leq 2\pi \times 4 \quad 20$$

軌道方程式の情報

軌道方程式の解を

$$r = -R_0 + \frac{xR_0}{1 + e \sin(f\theta)} \quad \text{とすると}$$

$$x = \frac{C^2}{c^2 R_0^2} + 1 \quad \cdots \text{軌道の大きさ}$$

$$e = \sqrt{x\left(\frac{C_0^2}{c^2} - 1\right) + 1} \quad \cdots \text{離心率}$$

$$f = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \quad \cdots \text{極点移動量}$$

4.04×10^{-6} (地球の半径)

ボーア半径の位置

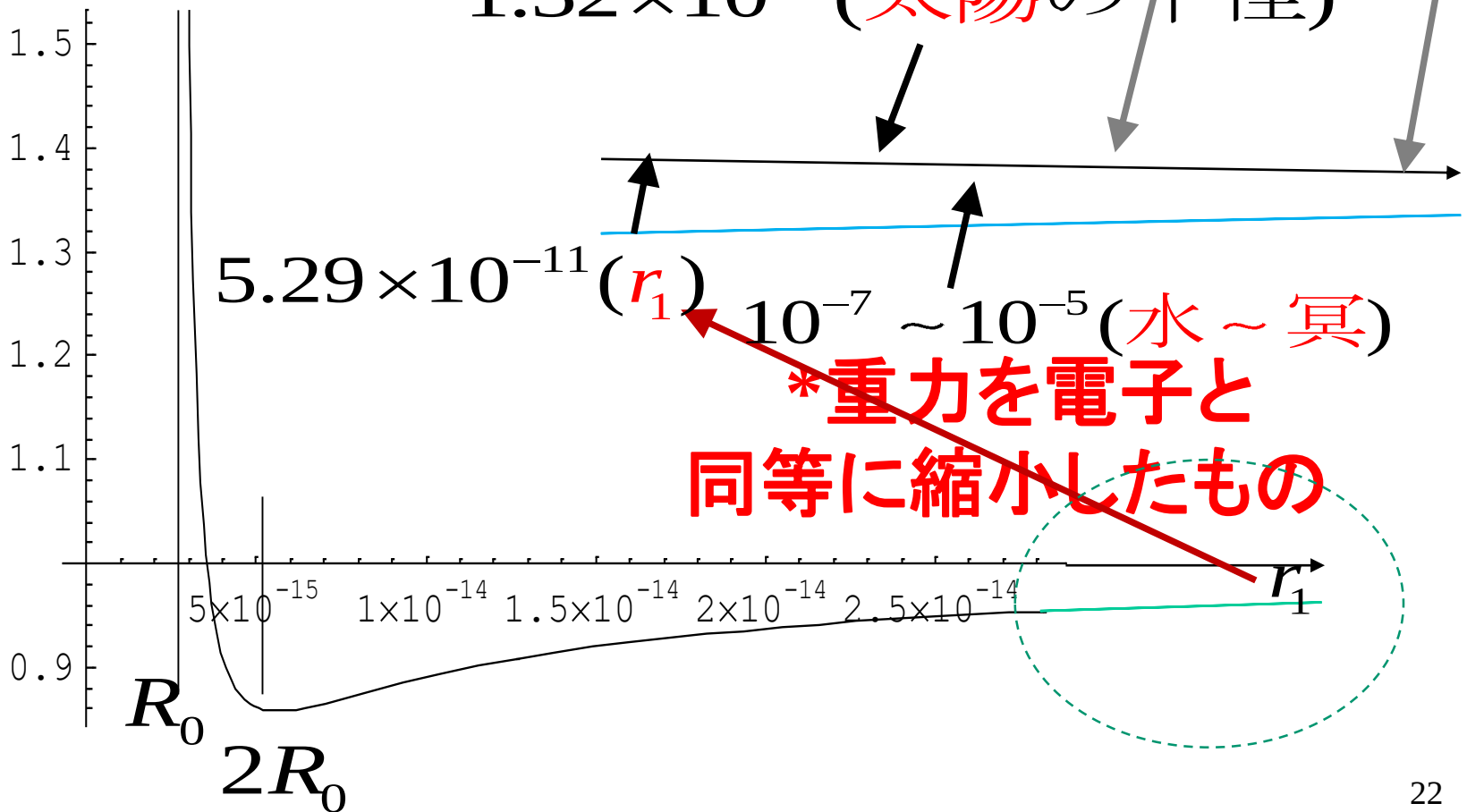
2.44×10^{-4} (月)

1.32×10^{-9} (太陽の半径)

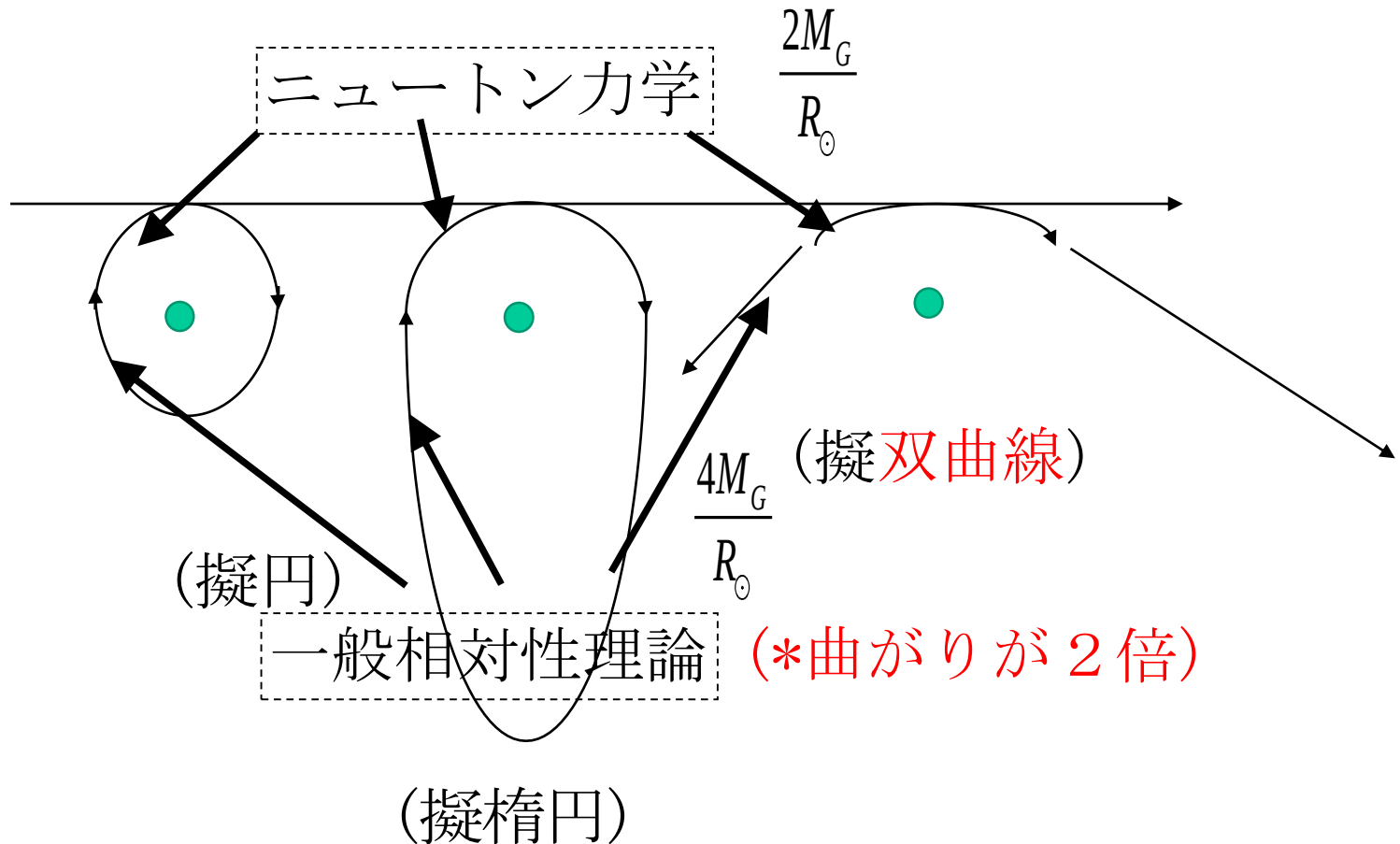
5.29×10^{-11} (r_1)

$10^{-7} \sim 10^{-5}$ (水 ~ 冥)

***重力を電子と
同等に縮小したもの**



(太陽近くでの)光の曲がり

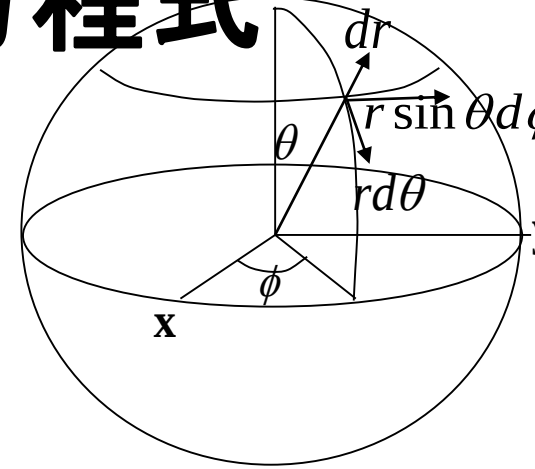


詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~shimamoto/genko.html>

(補)ケプラータイプの方程式^z

ケプラータイプの方程式



$$(a) \quad m_e c \frac{dct}{d\tau} = m_e c C_0 e^{\frac{keQ}{m_e c^2 r}} \dots (\text{the conservation of energy})$$

$$(b) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} (r \sinh \Omega) = - \left(\frac{keQ}{m_e c^2 r^2} \frac{dct}{d\tau} \right) (\tanh \Omega - r \cosh \Omega \frac{d\varphi}{dct}) \cosh \Omega \left(\frac{dct}{d\tau} \right) \dots (\text{the structure of space})$$

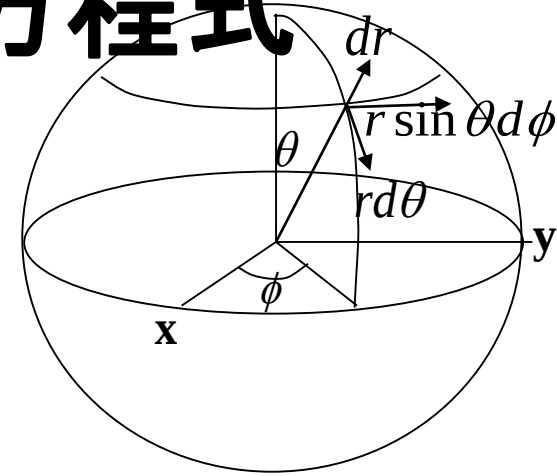
$$(c) \quad r^2 \left\{ \left(r \cosh \Omega \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - \left(r \frac{d\Omega}{d\tau} \right)^2 \right\} = C^2 \dots (\text{the law of equal areas})$$

$$(d) \quad r^2 \cosh \Omega \frac{d\varphi}{d\tau} = C \cosh \Theta (\geq 0), \quad r \frac{d\Omega}{d\tau} = -C \sinh \Theta$$

$$\Theta = - \int \left(\frac{keQ}{m_e c^2 r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\varphi}{d\tau} \right) d\tau \dots (\text{the internal rotation})$$

(補)円軌道 $\Omega = c_0$ の方程式

円軌道 $\Omega = c_0$ の方程式



$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ m_e c \frac{dct}{d\tau} = m_e c C_0 e^{\frac{keQ}{m_e c^2 r}} \dots (\text{the conservation of energy}) \\ (b) \ 0 = -\left(\frac{keQ}{m_e c^2 r^2} \frac{dct}{d\tau}\right) (\tanh \Omega - r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dct}) \cosh \Omega \left(\frac{dct}{d\tau}\right) \dots (\text{the structure of space}) \\ (c) \ r^2 \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = C^2 \dots (\text{the law of equal areas}) \\ (d) \ r^2 \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau} = C (\geq 0), \ 0 = -C \sinh \Theta \\ \quad 0 = -\int \left(\frac{keQ}{m_e c^2 r^2} \frac{dct}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}\right) d\tau \dots (\text{the internal rotation}) \end{array} \right.$$

(補)自転パラメータ(Ω) の値

$(b'), (d')$ より

$$\tanh \Omega = r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\frac{keQ}{m_e c^2 r^2} \frac{d\tau}{d\tau} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau}$$

よって

$$\tanh \Omega \cdot r \cosh \Omega \frac{d\phi}{d\tau} = r \sinh \Omega \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{keQ}{m_e c r} = \frac{R_0}{r}.$$

$$\therefore \tanh \Omega = \sqrt{\frac{R_0}{r}}.$$

