

題名

“惑星軌道と電子軌道”

日本文理大学

機械電気工学科 竹本義夫・島元世秀

目次

1. 電子の運動方程式・既出

運動方程式を解く

2. 惑星の軌道方程式(水星の極点)

*電子と惑星の”運動メカニズム”は同じ

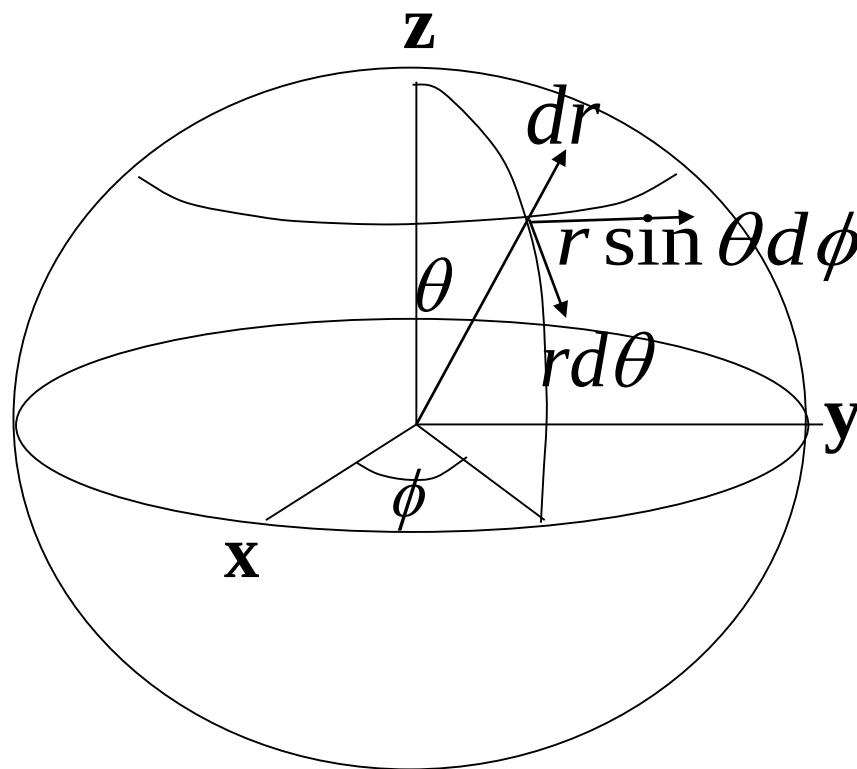
3. 光の軌道方程式

光の屈曲(”運動方程式の信憑性”)

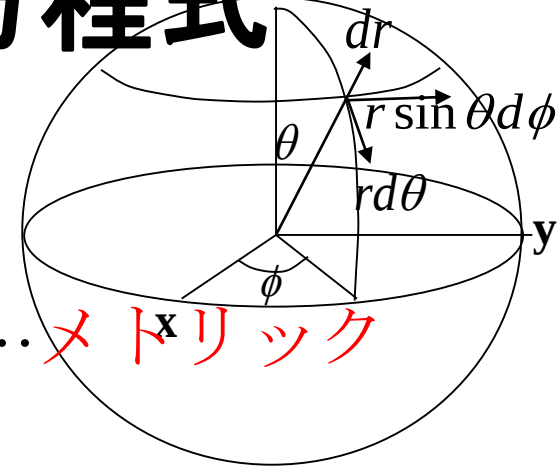
1.運動方程式を解く(既出)

球面座標系

$$\left\{ \begin{array}{l} (ct = ct) \\ x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right.$$



Maxwell(運動)方程式^z



球面座標を用いると、

$$ds^2 = -dct^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \dots \text{メトリック}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \dots \text{(時間方向加速度)} \\ (2) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{k_0 e Q}{m_e c^2 r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right\} \dots \text{(動径方向加速度)} \\ (3) \frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{\text{real}} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \cdot r \frac{d\theta}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdot r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \dots \text{(緯度方向加速度)} \\ (4) \frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)_{\text{real}} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \cdot r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdot r \frac{d\theta}{d\tau} \dots \text{(経度方向加速度)} \end{array} \right.$$

主方程式と軌道方程式

主方程式(メトリックと同値)

$$\left(\frac{dr}{dc\tau}\right)^2 = \left(\frac{C_0}{c} e^{\frac{R_0}{r}}\right)^2 - \left(\frac{C}{cr}\right)^2 - 1$$

軌道方程式($d\theta = e^{-\frac{R_0}{r}} d\Phi$)

$$\frac{dr}{d\theta} \left(= \frac{dr}{e^{-\frac{R_0}{r}} d\Phi}\right) = -r \sqrt{-1 + r^2 \frac{C_0^2}{C^2} e^{\frac{2R_0}{r}} - r^2 \frac{c^2}{C^2} e^{\frac{R_0}{r}}}$$

軌道(極点移動)

自転の影響小

$$(1) r_0(\text{ボーア半径}) = \underline{18781} \bar{R}_0 = 5,2923 \times 10^{-11}$$

$$(\text{自転なしデータ}) \quad C = 0.000115771 \frac{m^2}{s} \quad C_0 = 2.99784 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$r = -\frac{\underline{2.8179} \times 10^{-15}}{R_0} + \frac{5,2923 \times 10^{-11} (= \underline{18781} R_0)}{1 + 0.0073 i \sin(\underline{1.0000266} \theta)}$$

$$\dots \dots \dots \underline{1.0000266}^2 (= 1.00005) = \frac{\underline{18781}}{18780}$$

$$(2) r_0 = \underline{2} R_0$$

$$(\text{自転なしデータ}) \quad C = 1.6896 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s} \quad C_0 = 2.5715 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$r = -\frac{\underline{2.8179} \times 10^{-15}}{R_0} + \frac{1.4090 \times 10^{-14} (= \underline{5} R_0)}{1 + 0.5668 i \sin(\underline{1.1180} \theta)}$$

$$\dots \dots \dots \underline{1.1180}^2 (= 1.25) = \frac{\underline{5}}{4}$$

自転の影響大

軌道方程式の**特徴**(指標)

軌道方程式の解を

$$r = -\overset{xR_0}{\color{green}R_0} + \frac{1 + e \color{green}\sin(\color{red}\alpha\theta)}{C^2}$$

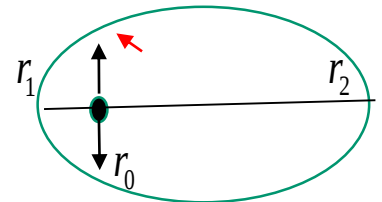
とすると

$$\left[\begin{aligned} e^{\frac{R_0}{r}} &= 1 + \frac{R_0}{r} + \cdots \\ &= \frac{1}{\underline{\underline{r + R_0}}} + \cdots \end{aligned} \right]$$

$$x = \frac{C^2}{c^2 R_0^2} + 1 \quad \cdots \text{軌道の**大きさ**}$$

*cos($\alpha\theta$)ではない

$$e = \sqrt{x\left(\frac{C_0^2}{c^2} - 1\right) + 1} \quad \cdots \text{離心率}$$



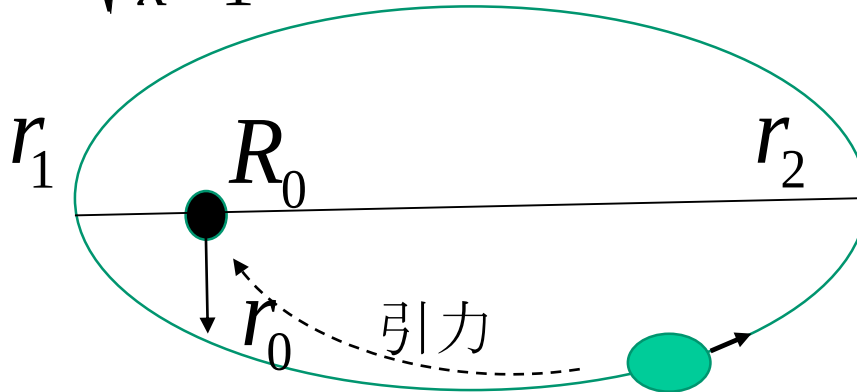
$$\alpha = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \quad \cdots \text{極点**移動**(後ろにずれる)}$$

*なぜ極点移動が起きるのか？

$$r = -R_0 + \frac{xR_0}{1 + e \sin(\alpha\theta)}$$

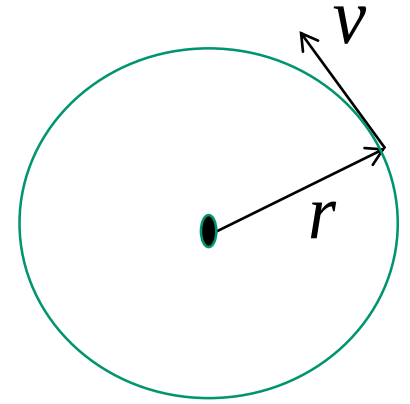
楕円軌道

$$\alpha = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \cdots \text{極点(常に後ろにずれる)}$$



*水星の近日点は進んでいる。?・・・進む理由はない。(要記憶)

2.電磁気力と重力



(円運動のつり合い)

$$(i) \text{電磁気力} \frac{mv^2}{r} = \frac{k_0 eQ}{r^2} \therefore \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{k_0 eQ}{rmc^2} = \frac{R_0}{r}, R_0 = \frac{k_0 eQ}{mc^2}$$

$$(ii) \text{重力} \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \therefore \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{GMm}{rmc^2} = \frac{M_G}{r}, M_G = \frac{GM}{c^2}$$

よって、電子**古典**半径 $R_0 = \frac{keQ}{m_e c^2}$ (電磁気力) に
シュバルトシルト半径 $M_G = \frac{GM}{c^2}$ (重力) が対応する。

惑星の軌道方程式

* $R_0 = \frac{keQ}{m_e c^2}$ (電磁気力) を $M_G = \frac{GM}{c^2}$ (重力) に替える。

(主方程式)

$$\left(\frac{dr}{dc\tau}\right)^2 = \left(\frac{C_0}{c} e^{\frac{M_G}{r}}\right)^2 - \left(\frac{C}{cr}\right)^2 - 1$$

軌道決定

面積速度

エネルギー係数

(軌道方程式)

$$\frac{dr}{d\theta} \left(= \frac{dr}{e^{-\frac{M_G}{r}} d\Phi} \right) = -r \sqrt{-1 + r^2 \frac{C_0^2}{C^2} e^{\frac{2M_G}{r}} - r^2 \frac{C^2}{C^2} e^{\frac{M_G}{r}}}$$

水星の軌道方程式

(1) 軌道方程式(超楕円・・・制限なし)

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sqrt{-1 + r^2 \frac{C_0^2}{C^2} e^{\frac{2M_G}{r}} - r^2 \frac{c^2}{C^2} e^{\frac{M_G}{r}}}$$

$$\sim -r \sqrt{-1 + r^2 \left(\left(\frac{C_0}{C} \left(1 + \frac{M_G}{r} \right) \right)^2 - r^2 \left(\frac{c}{C} \right)^2 \left(1 + \frac{M_G}{r} \right) \right)}$$

(2) 軌道方程式(楕円軌道に限定する・・・ケプラー)

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sqrt{\frac{C_0^2 - c^2}{C^2} r^{\textcircled{2}} + M_G \left(\frac{4C_0^2 - 2c^2}{C^2} \right) r - \left(1 - M_G^2 \frac{8C_0^2 - 2c^2}{C^2} \right)}$$

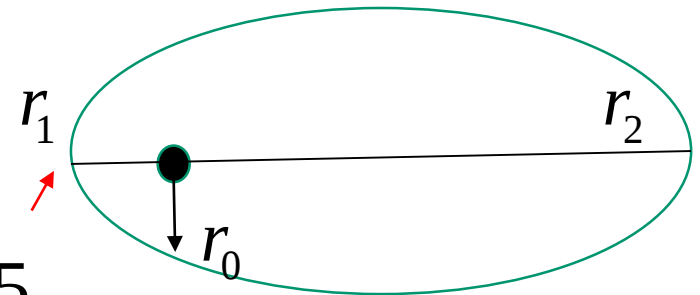
水星データ(楕円軌道)

楕円の方程式

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} (1 + e \cos(\alpha \theta)) \quad , \alpha (\div 1) \text{ は近日点の移動係数}$$

$$r_1 = 46,001,272 \text{ km (近日点)} , r_2 = 69,817,079 \text{ km (遠日点)}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r_0} , \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2e}{r_0} \quad \text{より}$$



$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\alpha \theta)} = \frac{55460545}{1 + 0.20563069 \cos(\alpha \theta)}$$

未定

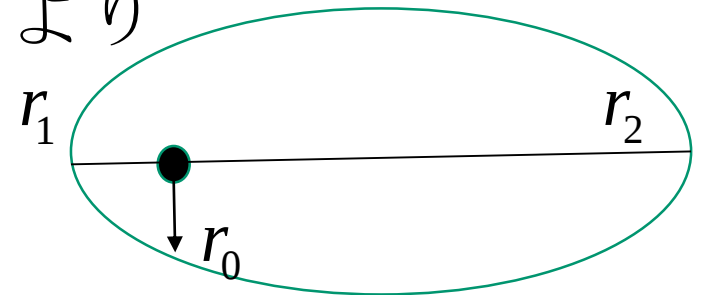
水星データ(C, C_0)

(面積速度 C と C_0 エネルギー係数)

近日点での方程式 $\frac{C^2}{r_{1,2}^2} - C_0^2 e^{2\frac{M_G}{r_{1,2}}} + c^2 = 0$ による

これは、

$$C = \frac{rv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, C_0 = \frac{c^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} e^{-\frac{M_G}{r}} \text{ より}$$



$$\frac{1}{r_{1,2}^2} \frac{r_{1,2}^2 v_{1,2}^2}{1 - \left(\frac{v_{1,2}}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{1 - \left(\frac{v_{1,2}}{c}\right)^2} + c^2 \equiv 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

水星データ2(C, C_0)

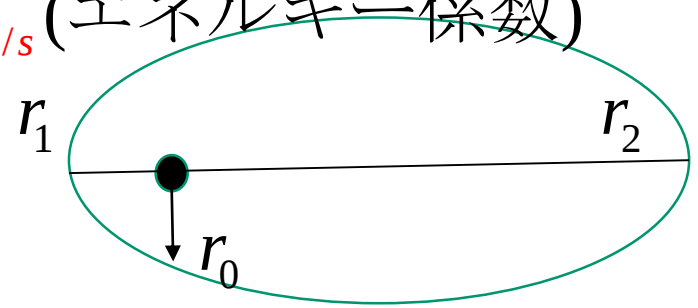
近日点での方程式 $\frac{C^2}{r_{1,2}^2} - C_0^2 e^{2\frac{M_G}{r_{1,2}}} + c^2 = 0$

これを解くと $C = \frac{rv}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = 0.000115771_{m^2/s}$ (面積速度)

$C_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} e^{-\frac{M_G}{r}} = 2.99784 \times 10^8_{m/s}$ (エネルギー係数)

ここで、

$$mcC_0 = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots\right) \left(1 - \frac{M_G}{r} + \dots\right) \doteq mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r}$$



水星軌道(極点移動)

水星データ(超橢円軌道の遅れ)

$$r_1 = 46,001,272\text{km}, r_2 = 69,817,079\text{km} \text{より}$$

$$C = 0.000115771_{m^2/s}, C_0 = 2.99784 \times 10^8_{m/s} \text{を代入して}$$

$$(1) \text{ (超橢円) } = -\frac{1476.68}{M_G} + \frac{5.54605 \times 10^{10} (= \underline{3.755747 \times 10^7 M_G})}{1 + 0.205631 \sin(\underline{1.00000000133129308}\theta)}$$

$$\underline{1.00000000133}^2 (= 1.00000000266) = \frac{\underline{3.755747 \times 10^7}}{\underline{3.755747 \times 10^7 - 1}}$$

* $\cos(\alpha\theta)$ ではない

水星軌道(極点移動2)

水星データ(楕円軌道の進み)・・・進む理由?

$r_1 = 46,001,272\text{km}$ (近日点), $r_2 = 69,817,079\text{km}$ (遠日点)

$\underline{\underline{C}} = 0.000115771_{\text{m}^2/\text{s}}$ (面積速度), $\underline{\underline{C}}_0 = 2.99784 \times 10^8_{\text{m/s}}$ (エネルギー係数)

$$(2) \ r = \frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + 0.205631 \sin(\underline{\underline{0.99999999201224145}}\theta)} \quad (\text{楕円})$$

(i) 1回の回転で

$$2\pi \left(\frac{1}{0.99999999201224145} - 1 \right)_{\text{rad}} \text{進む}$$

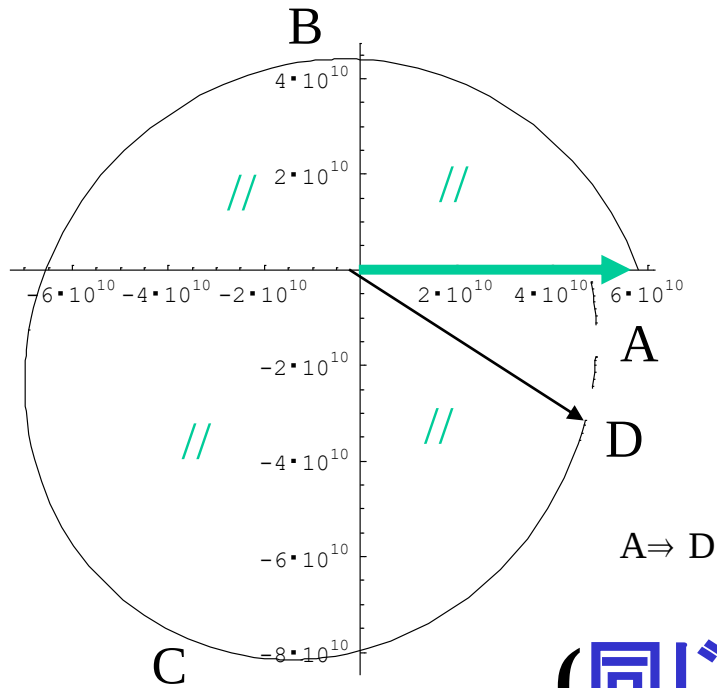
*cos($\alpha\theta$)ではない

(ii) 415回の回転で

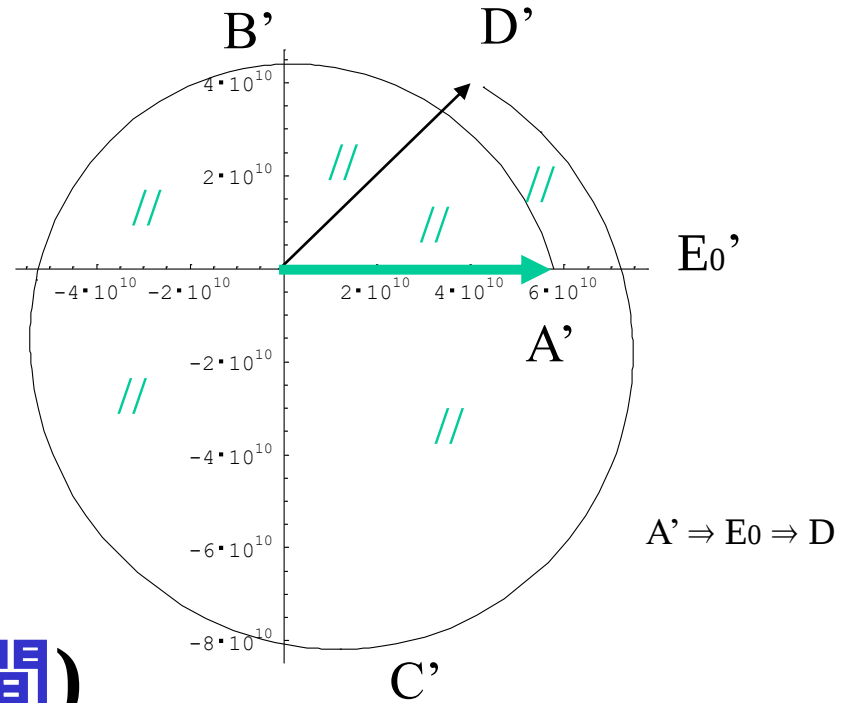
$$360_{[\text{deg}]} \times 60^2 \left(\frac{1}{0.99999999201224145} - 1 \right) \times 415_{[\text{回}]} = \underline{\underline{42.961364041684334}}_{\text{秒}} \text{進む}$$

一周面積の比較(図)

(超橢円)



(橢円)



(同じ時間)

一周面積の比較

(i) 楕円の1周 ($f_1 = 0.99999999201224145$)

$$\int_0^{2\pi/\underline{\underline{\alpha_1}}} \left(\frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + \underline{0.20563080513591092} \sin(\underline{\underline{\alpha_1}} \theta)} \right)^2 d\theta$$

一周の面積(時間)

$$= \frac{1}{\underline{\underline{\alpha_1}}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + \underline{0.20563080513591092} \sin(\theta)} \right)^2 d\theta = \frac{1}{\underline{\underline{\alpha_1}}} I_1$$

(ii) 超楕円の1周 ($f_2 = 1.00000000133129308$)

$$\int_0^{2\pi/\underline{\underline{\alpha_2}}} \left(-1476.68 + \frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + \underline{0.2056306086355553} \sin(\underline{\underline{\alpha_2}} \theta)} \right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{\underline{\underline{\alpha_2}}} \int_0^{2\pi} \left(-1476.68 + \frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + \underline{0.2056306086355553} \sin(\theta)} \right)^2 d\theta = \frac{1}{\underline{\underline{\alpha_2}}} I_2$$

1 周面積の一致

楕円の1周と 超楕円の1周が一致するとき

$$\int_0^{2\pi/\underline{x}} \left(\frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + \underline{0.20563080513591092} \sin(\underline{x}\theta)} \right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi/\underline{\alpha_2}} \left(-1476.68 + \frac{5.54605 \times 10^{10}}{1 + \underline{0.2056306086355553} \sin(\underline{\alpha_2}\theta)} \right)^2 d\theta$$

$$\therefore \underline{x} = \frac{\underline{\alpha_2}}{\underline{I_2}} I_1 \quad x = \underline{\underline{0.9999999201223493}}$$

また、 $\underline{\alpha_1} = \underline{\underline{0.9999999201224145}}$ 、 よって

面積速度が同じ($\Rightarrow$ 時間も同じ)。

3.光の軌道

楕円の軌道

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sqrt{\frac{C_0^2 - c^2}{C^2} r^2 + M_G \left(\frac{4C_0^2 - 2c^2}{C^2} \right) r - \left(1 - M_G^2 \frac{8C_0^2 - 2c^2}{C^2} \right)}$$

光の軌道 $R_\odot = 6.955 \times 10^8 m$, $v_1 \rightarrow c$ とすると

$$\frac{C_0}{C} = \frac{1}{\frac{M_G}{R_\odot}} \div \frac{1}{R_\odot} \text{ より}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R_\odot e \frac{dr}{e^{-\frac{M_G}{r}} d\Phi}}{\frac{1}{R_\odot^2} r^2 + M_G \left(\frac{4}{R_\odot^2} \right) r - \left(1 - M_G^2 \frac{8}{R_\odot^2} \right)}$$

よって

$$r = \frac{1.64021 \times 10^{14}}{1 + \underline{\underline{235663}} \sin(0.9999999999981994\theta)}$$

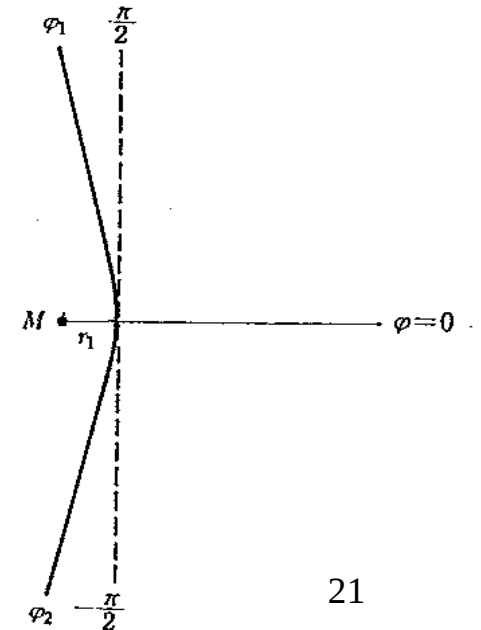
光の屈曲

ひかりの軌道 (確認) $R_{\odot}' (= r_1) = \frac{1.64021 \times 10^{14}}{1 + 235662} = 6.95997 \times 10^8$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1.64021 \times 10^{14}} (1 + \underline{\underline{235662}} \sin(0.99999999999981994 \theta))$$

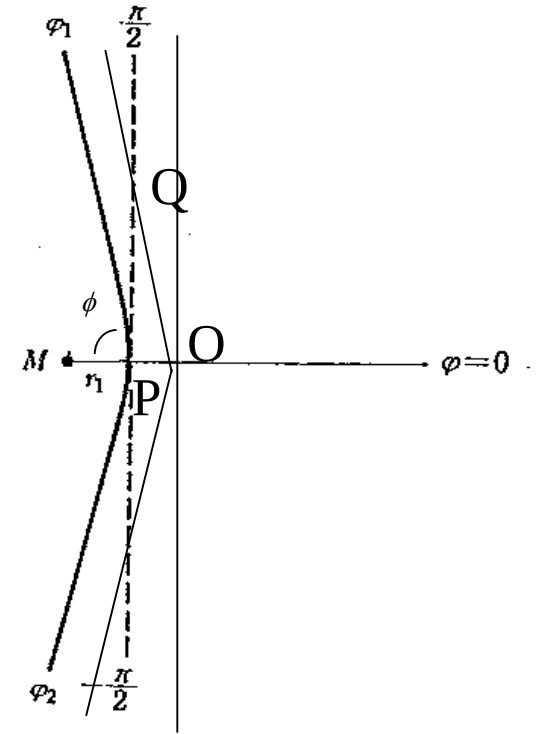
$$= \frac{\frac{2M_G}{R_{\odot}^2}}{1 - \frac{8M_G^2}{R_{\odot}^2}} (1 + e \sin \left(\sqrt{1 - \frac{8M_G^2}{R_{\odot}^2}} \cdot \theta \right))$$

(確認) $1 + e = \frac{\frac{R_{\odot}^2}{1 - \frac{8M_G^2}{R_{\odot}^2}}}{\frac{2M_G}{R_{\odot}}} \div \frac{R_{\odot}'}{2M_G} = 235663 \therefore e = 235662$



光の屈曲2

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \frac{PQ}{OP} = \frac{\sqrt{OQ^2 - OP^2}}{OP} \\ &= \sqrt{e^2 - 1} \div e = \underline{\underline{235662}}\end{aligned}$$



$$2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \doteq 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{2}{\tan \theta} = \frac{2}{235662}$$

$$= 8.48669 \times 10^{-6} [rad] = 1.75051''$$

詳しくは

<http://www.nbu.ac.jp/~shimamoto/genko.html>