

ある世界の物理学*

竹 本 義 夫**

The Physics in "A" World

Yoshio TAKEMOTO

Department of Mechanical and Electrical Engineering, School of Engineering,
Nippon Bunri University

Abstract

This is a story of an imaginary world. We will travel to "A" world with Tompkins¹⁾.

This imaginary world (the cosmos) is different in some points from the "real" world (the Big Bang cosmos) we live in.

One of the different points is that it introduces the "time component" into the electro-magnetic field and that this component causes an undiscovered force.

Another point is a 4-dimensional vector product (new) which is a combination of vector and scalar products.

The components of this paper are an overview (2-8), a new story (9-11) and the future.

Contents:

In § 1, we introduce the time component into the electro-magnetic field and show its applications.

In § 2, we explain the matrix expression and show its usefulness.

In § 3, we explain the adding of the relativistic element to the matrix.

In § 4, we express the basic space in the imaginary space and show its distinctive feature.

In § 5, we construct the gravitational imitation force under some limits which is like the electro-magnetic force.

In § 6, we construct the equation of gravitation and interpret it.

*平成22年6月18日受理

**日本文理大学工学部機械電気工学科 教授

§ 1. 電磁場空間での基本法則の違い (今までの総括と発端)²⁾⁻⁸⁾

以前から思っていることで、現実の空間には物理量の形式が整っていない不思議なことが2つある。

(1) ひとつは、アインシュタイン以来ほとんどの物理量は、次の例のように時間成分(1次元)と空間成分(3次元)の4元ベクトルとしての扱いがなされている。(cは光速)

例1 エネルギー-運動量 $\left(\frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{P}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{c}, P_x, P_y, P_z\right)$

例2 ポテンシャル-ベクトルポテンシャル $(\phi, c\mathbf{A}) = (\phi, cA_x, cA_y, cA_z)$

例3 電荷-電流 $\left(\rho, \frac{\mathbf{j}}{c}\right) = \left(\rho, \frac{j_x}{c}, \frac{j_y}{c}, \frac{j_z}{c}\right)$

ところが電磁場は電場 $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]$ と磁場 $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]$ の空間成分だけになっている。・・・このままでも相対性理論とは矛盾しない。

架空の世界の電磁場には、時間成分 $E_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A}$ があり現実とは異なる事象を見ることができる。・・・磁場の成分はモノポール不在のため $B_t = 0$ である。

即ち、電場・磁場をセットにして時間成分を導入すると電磁場は4元ベクトル場 $(\underline{E}_t - ic\mathbf{B}, \mathbf{E} - ic\mathbf{B})$ となる²⁾。・・・ $\mathbf{E} - ic\mathbf{B}$ の“-”は既存の式と合わせるためである。

また、ゲージ変換(現実の世界)の例として、

$$\text{Lorenz ゲージ} \Leftrightarrow (\underline{E}_t) = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A} = 0$$

$$\text{Coulomb ゲージ} \Leftrightarrow \text{div } c\mathbf{A} = 0 \left(\Leftrightarrow \underline{E}_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} \right)$$

があるが、これらは同等の電磁場をあたえるものとして電磁場の波動方程式を導くとき $\underline{E}_t$ の値 "0" (Lorenz ゲージ) が適宜利用されている。

このように、物理量 $\underline{E}_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A}$ について、現実の世界では、値が(ゲージ変換により) "0" となるにはいろいろなところに出てきているようにみえる。・・・架空の世界では $\underline{E}_t = 0$ は必要ではなく、 $\underline{E}_t$ 自身も波動方程式を満たしている²⁾。

初期の段階では話を簡単にする為に必要であっても、いつまでもこのままでは本質がみえてこない。・・・架空の世界では当然 $\underline{E}_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A} \neq 0$ であり、力の発生源としても関わっていて、なくてはならないものである。(次の項目 (2))

ここまでのまとめ

現実の世界

電磁場:

Lorentz, Coulombゲージ: 同じ電磁場。

架空の世界

電場 $\mathbf{E}$ (3次元) と磁場 $\mathbf{B}$ (3次元)。 四元電磁場 $(\underline{E}_t, \mathbf{E} - ic\mathbf{B})$ 。

$\underline{E}_t$ が異なるとき、独立した電磁場である。

$\underline{E}_t$ のイメージ (架空の世界のはなし)⁶⁾

ここで、速度 $\mathbf{v}(x, y, z)$ をもつ電荷雲 $\rho_0(x, y, z)$ を考え、電荷および(無限小区間の)電流が時間に独立 ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) であるとする。・・・話を簡単にする為。

このとき $\underline{E}_t$ の直観的なイメージを求めるため

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c}\right)^2}}$$

$$\mathbf{I}(x, y, z) = c\rho_0 \gamma \mathbf{v} = c\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}, \quad \beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$$

とし、その位置にとどまっているものとする。・・・後端で湧き上がり、先端で消滅する(back building)。

このとき、四元ポテンシャルと電磁場は次の形で得られる⁸⁾。

ポテンシャルは

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{I}}{r} dV, \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

電磁場 ($\underline{E}_t$ を含む) は

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dV$$

$$c\mathbf{B} = \text{rot } c\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{r^3} dV$$

$$\underline{E}_t = \text{div } c\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV \text{ である。}$$

ここで、“ $\times$ ” と “ $\cdot$ ” は通常のベクトル積とスカラー積である。

これに時間による変化がある場合は $\frac{\partial \phi}{\partial ct}$, $-\frac{\partial c\mathbf{A}}{\partial ct}$ が加わり、 $\mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{A}}{\partial ct} - \text{grad} \phi$, $\underline{E}_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A}$ となる。

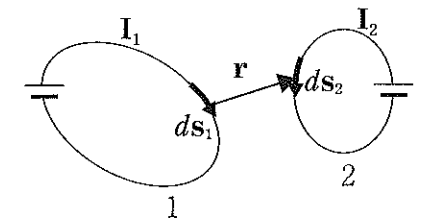
特に $\underline{E}_t$ の発生原因である (i) $\frac{\partial \phi}{\partial ct}$ は時間成分の“名”のとおりに過去から未来へ向けてのポテンシャル変化率、また (ii) $\text{div } c\mathbf{A}$ は外へ飛び出そうとする“能力”をあらわし、時間の経過で力を発揮するものである。

(2) もうひとつは、ニュートン以来の運動の三法則について、私は全ての事象で成り立っているものと思っていた。ところが第3法則(作用反作用の法則)は古典的にも、電磁気学では成り立っていないことがわかった。

例 (電流どうしの及ぼす力)

電流部分のみを対象とする議論で、結論だけを述べると

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{I}_2 ds_2 \times (\mathbf{I}_1 ds_1 \times \mathbf{r})}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_2 ds_2 \cdot \mathbf{I}_1 ds_1) \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_2 ds_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I}_1}{r^3} ds_1 \end{aligned}$$



電流間の力

$$d\mathbf{f}_{2,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_1 ds_1 \cdot \mathbf{I}_2 ds_2) \mathbf{r}}{r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_1 ds_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I}_2 ds_2}{r^3}$$

のように, ds_1, ds_2 の方向によっては力が逆方向にはならない。・・・, ds_1, ds_2 が平行の場合には第3法則が成り立つ。

この原因は時間成分 E_t の力に対する貢献が考慮されて無い為である。・・・新しい力

そこで, 電磁場の Lorentz 変換による変化を利用し, 第3法則(作用反作用の法則)が成り立つように E_t の力に対する効果を調べていくと,

電磁場 ($E, \mathbf{B}$) の電荷 q , 電流 $\mathbf{j}$ に対する Coulomb-Lorentz 力は $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B}$ と二重下線を追加すれば良いことがわかる。

実際, 次の様に

$$d\mathbf{f}_{1,2} + \frac{\mathbf{j}_2}{c} E_{t1} (\text{追加}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_2 ds_2 \cdot \mathbf{I}_1 ds_1) \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_2 ds_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I}_1 ds_1}{r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_1 ds_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I}_2 ds_2}{r^3}$$

$$d\mathbf{f}_{2,1} + \frac{\mathbf{j}_1}{c} E_{t2} (\text{追加}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_1 ds_1 \cdot \mathbf{I}_2 ds_2) \mathbf{r}}{r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_1 ds_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I}_2 ds_2}{r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{I}_2 ds_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I}_1 ds_1}{r^3}$$

となり, 古典的な段階でも第3法則が成り立っている⁶⁾。

上記 (1), (2) を総合し, 勘案すると E_t (時間成分) は無いよりはあったほうがうまくいく。…あっても既存の物理学に大きな変更はない。

まとめ

現実の世界

力: Coulomb 力と Lorentz 力。

第3法則: 平行電流間でのみ成り立つ。

架空の世界

E_t による力を加えた Coulomb-Lorentz 力。

任意の電流間で成り立つ。

§ 2. 電磁場方程式の行列化(深みに入っていく)⁹⁾

四元時空ベクトルを次のように表記する (c は光速)。

$$\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ (特に Minkowski 空間 } \mathbb{R}^{1,3}) \Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \in \{X \in M(2, \mathbb{C}) / \overline{X} = X\}$$

これを, 行列ベクトル(matrix vector)という。

この表記は (1) 行列としての機能性 (2) ベクトルとしての簡明さをあわせ持つものである。

また, この四元ベクトルの行列積を四元ベクトル積(4-dimensional vector product)という。

$$\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ctct' + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \\ ct\mathbf{r}' + \mathbf{r}ct' - i\mathbf{r} \times \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

ここで, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$, $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$, $ct\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}ct'$ はスカラー積, ベクトル積 及びスカラー倍である。

実際, 行列としての積を計算すると

$$\begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'+x' & y'+iz' \\ y'-iz' & ct'-x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ctct' + xx' + yy' + zz') & \{(cty' + yct') - i(zx' - xz')\} \\ +\{(ctx' + xct') - i(yz - zy')\} & +i\{(ctz' + zct') - i(xy' - yx')\} \\ \{(cty' + yct') - i(zx' - xz')\} & (ctct' + xx' + yy' + zz') \\ -i\{(ctz' + zct') - i(xy' - yx')\} & -\{(ctx' + xct') - i(yz - zy')\} \end{pmatrix}$$

であり, 内部にスカラー積・ベクトル積を含んでいることがわかる。

これにより四元ベクトル積(行列積)はスカラー積とベクトル積の上位の積であり4元ベクトル間の相互作用を表しており, 通常の3元(空間)ベクトルの相互作用はその一部である。

この積を図式化すると, 行列ベクトルは $\begin{pmatrix} \text{時間成分(1次元)} \\ \text{空間成分(3次元)} \end{pmatrix}$ であるから,

時間成分の計算 $ab + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (スカラー積) は $\begin{pmatrix} a & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 。

空間成分(実)の計算 $\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} b$ (スカラー倍) は $\begin{pmatrix} a & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 。

空間成分(虚)の計算 $-i\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (ベクトル積) は $\begin{pmatrix} a & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 。

で, 四元ベクトル積計算のイメージを得ることができる。

(四元ベクトル積の応用例)

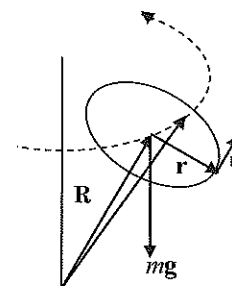
ベクトル積の部分は $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow -i\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ である。これは空間ベクトルではあるが純虚数として現れている。・・・数学的には回転の大きさを表している。

現実の世界では回転の大きさを表すベクトルはベクトル積 $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ で表され, 軸性ベクトルといい通常のベクトルとは区別され, ベクトルとの合成はできないがベクトル積は可能である。・・・これは複素ベクトルと考えると納得がいく。

例1. 歳差運動の解釈

コマの回転を表すベクトルは, 回転の中心から周辺に向かったベクトル $\mathbf{r}$ とコマの周辺の速度 $\mathbf{u}$ とのベクトル積であり, 純虚数 $i\mathbf{L} = i\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ で表される。

また, 接地点から重心までの位置ベクトルを $\mathbf{R}$ とすると, 軸の変化は $i\mathbf{R} \times \mathbf{mg}$ (歳差運動) である。よって新しい回転の大きさを表すベクトルは $i(\mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{mg})$ となる。



コマの歳差運動

他に、いろんな発展(書き直し)が期待できる。

例2. Maxwell 方程式(現実の世界)の行列表記・・・これを用いると見通しが良くなる

現実の世界 ($E_t = 0$) の Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial ct} = 0 & (\text{Faraday の電磁誘導の法則}) \cdots (1) \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 & (\text{磁界に関する Gauss の定理}) \cdots (2) \\ \text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Gauss の定理}) \cdots (3) \\ \text{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c} & (\text{Ampère の周回積分の法則}) \cdots (4) \end{cases}$$

であるが i を虚数単位として

(3)-(2) $\times ci$ と (1) $\times (-i)$ - (4) $\div c$ を作ると

$$\begin{cases} \text{div} (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{時間成分} \cdots (2), (3) \\ \frac{\partial (\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i \text{rot} (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c} & \text{空間成分} \cdots (1), (4) \end{cases}$$

となる。これを行列ベクトルの表記にすると

$$\left(\text{div} (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) \quad \frac{\partial (\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i \text{rot} (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c} \end{pmatrix} \text{であり、左辺は更に}$$

時間微分 $\frac{\partial}{\partial ct}$, 空間微分 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ の演算子に対しても四元ベクトル積を適用して

$$\left(\text{div} (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) \quad \frac{\partial (\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i \text{rot} (\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_t (= 0) \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

となるから、

Maxwell 方程式は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_t (= 0) \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c} \end{pmatrix} \text{で、1つの方程式にまとめることができる。}$$

まとめ

現実の世界

相互作用：スカラー積、ベクトル積。

電磁場：4×4の行列表示 (テンソル)。

架空の世界

四元ベクトル積 (スカラー積・ベクトル積の上位に位置する。)

2×2の行列表示 ($\underline{E}_t$ を含むベクトル)。

$$\text{行列: } \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{E}_t - iB_t (= 0) & (E_x - icB_x) \\ + (E_x - icB_x) & + i(E_y - icB_y) \\ (E_y - icB_y) & \underline{E}_t - iB_t (= 0) \\ -i(E_x - icB_x) & -(E_x - icB_x) \end{pmatrix}$$

§ 3. 行列ベクトルと相対論との関係 (さらなる深みに・・・)⁹⁾

今後の為に、よく知られている Lorentz 変換を行列ベクトルで表しておこう。

x 方向へ速度 v で移動している系との間の Lorentz 変換は

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \cosh \Theta, \quad \gamma\beta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \sinh \Theta$$

で、表される。

通常、この Lorentz 変換は 4×4 の行列

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{で表わされるが、}$$

ここでは、 2×2 の行列表記にするために

$\gamma_+ = \cosh \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$, $\gamma_- = \sinh \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$ を用いると、 $\gamma_+^2 + \gamma_-^2 = \gamma$, $2\gamma_+\gamma_- = \gamma\beta$ の関係があり、これを経由して行列ベクトルで表すことができる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} ct' + x' & y' + iz' \\ y' - iz' & ct' - x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x) + \gamma(x - \beta ct) & y + iz \\ y - iz & \gamma(ct - \beta x) - \gamma(x - \beta ct) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta)(ct + x) & y + iz \\ y - iz & \gamma(1 + \beta)(ct - x) \end{pmatrix}, \quad \gamma(1 \pm \beta) = (\gamma_+ \pm \gamma_-)^2, \quad \gamma_+^2 - \gamma_-^2 = 1 \text{ より} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_+ - \gamma_- & 0 \\ 0 & \gamma_+ + \gamma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct + x & y + iz \\ y - iz & ct - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ - \gamma_- & 0 \\ 0 & \gamma_+ + \gamma_- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、行列ベクトルでは

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & [-\gamma_-, 0, 0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & [-\gamma_-, 0, 0] \end{pmatrix} \text{となる。}$$

これは任意の方向へと移行することができ、方向余弦を (A, B, C) とすると、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \gamma_-(A \ B \ C) \text{である。}$$

ここで、便宜上 $-\gamma_0$ の符号 “-” を記号化して、 $\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ のように両肩にのせ、これをローレンツ形式という。

また、空間ベクトル部分の符号を変えたもの、即ち余因子行列は波線(ティルダ)をつけ

$$\begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct-x & y-iz \\ -y+iz & ct+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \text{で表し、ローレンツ形式では}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ -\mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{r} \end{pmatrix} \text{の様に両肩に “+” がつく。}$$

また、微分演算子の Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct'} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \text{である。}$$

その他の例 (既存の式に E_t を追加・修正)

四元ポテンシャル $(\phi, c\mathbf{A}) = (\phi, cA_x, cA_y, cA_z)$ を微分すると電磁場に時間成分 E_t が現れる。

$$\begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ -c\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A} \\ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi - i \text{rot } c\mathbf{A} \end{pmatrix}$$

これは $E_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div } c\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{A}}{\partial ct} - \text{grad } \phi$, $c\mathbf{B} = \text{rot } c\mathbf{A}$ と同等である。

さらに、電磁場 (E_t を含む) を微分すると Maxwell 方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c} \end{pmatrix}$$

これは $\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct} = 0$, $\text{div } c\mathbf{B} = 0$, $\text{div } \mathbf{E} + \frac{\partial E_t}{\partial ct} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\text{rot } c\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct} - \text{grad } E_t = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c}$ と同等である。

ここで、電磁場の両肩の “-”, “+” を具体的に書き下すと、電磁場は Lorentz 変換で、

$$\begin{pmatrix} E_t' \\ \mathbf{E}' - ic\mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & -\gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

の変換を受ける。特に x 方向へは $\gamma_0 = \gamma_- [1 \ 0 \ 0]$ であるから Lorentz 変換をすると、

$$\begin{pmatrix} E_t' \\ (E_x' - icB_x', E_y' - icB_y', E_z' - icB_z') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & [-\gamma_-, 0, 0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t \\ [E_x - icB_x, E_y - icB_y, E_z - icB_z] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & [\gamma_-, 0, 0] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_+ E_t - \gamma_- (E_x - icB_x) & \\ & [-\gamma_- E_t + \gamma_+ (E_x - icB_x) \\ & , \gamma_+ (E_y - icB_y) - i\gamma_- (E_z - icB_z) \\ & , \gamma_+ (E_z - icB_z) + i\gamma_- (E_y - icB_y)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \\ & [\gamma_-, 0, 0] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_t \\ [E_x - icB_x \\ , \gamma (E_y - icB_y) - i\gamma\beta (E_z - icB_z) \\ , \gamma (E_z - icB_z) + i\gamma\beta (E_y - icB_y)] \end{pmatrix} \text{となる。} \dots E_t \text{ はどの方向の変換でも不変である。}$$

これは、現実の世界の変換

$$E_x' - icB_x' = E_x - icB_x \text{ (不変)}$$

$$E_y' - icB_y' = (\gamma E_y - \gamma\beta cB_z) - i(\gamma cB_y + \gamma\beta E_z)$$

$$E_z' - icB_z' = (\gamma E_z + \gamma\beta cB_y) - i(\gamma cB_z - \gamma\beta E_y) \text{ とおなじものである。}$$

四元力は、電磁場と運動粒子の相互作用(四元ベクトル積)により発生する。

$$\begin{pmatrix} F_t \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix}$$

これは、 $F_t = qE_t + \frac{\mathbf{j}}{c} \cdot \mathbf{E} - i \frac{\mathbf{j}}{c} \cdot c\mathbf{B}$, $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} E_t + \frac{\mathbf{j}}{c} \times c\mathbf{B} - i \left(qc\mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{E} \right)$ と同等で、既存の Coulomb-Lorentz 力が

含まれており四元ベクトル積が相互作用を表す上で、ベクトル積・スカラー積の上位に位置することを裏付けている。また、この中には E_t の効果だけではなく、複素力(下線部)まで含んでいる。

純虚数成分は、四元ベクトル積で自然に出てくるものであり、また電磁場の中で磁場は複素成分($-ic\mathbf{B}$)として表現されているにもかかわらず、電流($\frac{\mathbf{j}}{c}$)とのベクトル積で“実”の目に見える力($\frac{\mathbf{j}}{c} \times c\mathbf{B}$)として現れてきていて無視できないものである。

このローレンツ形式は物理量の相互作用(四元ベクトル積)を考えるとときに適否を判断する良い指針となる。例えば

$$\begin{pmatrix} q \\ \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ は記号 “-” が2つ並んでいて、相対論的に適当でない相互作用である。}$$

まとめ

現実の世界

Lorentz 変換: 4×4の行列による変換。

Maxwell 方程式: 4つの方程式。

四元力: 時間成分はエネルギーの変化,

空間成分は運動量の変化である。

架空の世界

2×2の行列のローレンツ形式。

1つの行列方程式(E_t を含む)。

E_t の効果および複素力を含む力。

§ 4. 仮想空間の形状について (少し寄り道)³⁾

最初に疑問点を2つばかりあげると

(1) 現実だと言われれば反論はできないが、4次元空間にどうして、Lorentz 変換なるものがあるのか? … 別の変換ではだめなのか?

(2) どうして光速が一定なのか?

この根拠 (必然性) について考えてみることにする。

まず、4次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ について、その接ベクトル空間の変換群 $SO(1, 3)$ をセットにしたものを考える。… 数学では主ファイバー束、物理ではゲージタイプという。

また、これは $S^7(\mathbb{C})$ から $S^4(\mathbb{C})$ への射影であり、

$$S^7(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})^2 \mid |X| + |Y| = 1 \right\} : \text{複素 7 次元空間}$$

$$\downarrow R_g, g \in SL(2, \mathbb{C})$$

$$S^4(\mathbb{C}) = \{(u_0, U) \in \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C}) \mid u_0^2 + |U| = 1\} : \text{複素 4 次元空間}$$

の様に表されるものである。ここで、 $S^7(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{1,3}$ (4次元) とその変換群 (3次元) $SL(2, \mathbb{C}) [\cong SO(1, 3)]$ をあわせたものである。… 変換群は数学では構造群、物理ではゲージ群という。

$$\text{この } S^4(\mathbb{C}) \text{ の立体射影 } (u_0, U) \rightarrow XY^{-1} \text{ が } \mathbb{C}^{1,3} = \left\{ \begin{pmatrix} cT+X & Y+iZ \\ Y-iZ & cT-X \end{pmatrix} \mid T, X, Y, Z \in \mathbb{C} \right\}$$

であり、 $\mathbb{C}^{1,3}$ の実部分が $\mathbb{R}^{1,3} = \left\{ \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \mid ct, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ で表される Minkowski 空間である。

この $S^4(\mathbb{C})$ の実部分 $S^4(\mathbb{R})$ (反 De-Sitter 空間) が上記 (1), (2) を実現する空間であり De-Sitter 空間の時間と空間方向の符号を入れ替えたもので、5次元空間の中で

$$(u_0)^2 + (u_1)^2 - (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 = 1$$

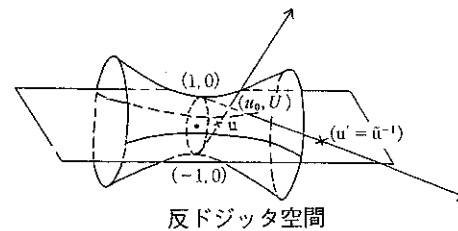
を満たす部分空間である。

空間が決まっても測地線 (物理学) は定まらない。その測地線を規定する接続を部分空間として自然なもの (標準接続) を入れる。

粒子は時間とともに測地線上を移動するが、接続が異なれば測地線は違ったものになる。

よって、仮想空間の変換として採用するのは、現実の世界のようにやみくもに全ての変換というわけではなく空間と接続をとともに不変とするものであり、物理学が不変となるものである。… “物理学を不変にする変換” と “接続を不変にする変換” とは同じ意味である。

また、この変換のひとつに Lorentz 変換があり、それは $S^4(\mathbb{R})$ (反 De-Sitter 空間) を不変にする変換のなかでも、速度 $\left(\frac{v}{c} = \tanh \theta_0\right)$ の異なる粒子の測地線を別の測地線に入れ替える自然な変換である。特に光の測地線は Lorentz 変換の固有ベクトルになっている。… 光の速度は一定。



具体的に $S^4(\mathbb{R})$ 上の Lorentz 変換とは、 $a \in SL(2, \mathbb{C}) [\cong SO(1, 3)]$ を用いて、

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX \\ a^{-1}Y \end{pmatrix} \text{ と表されるものである。}$$

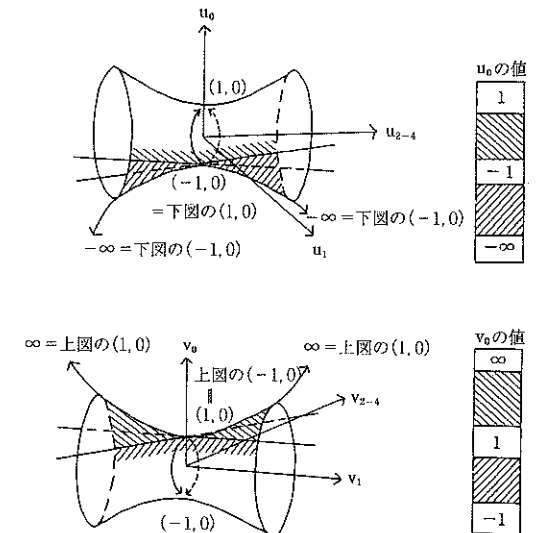
Minkowski 空間上では $U = XY^{-1} \rightarrow U' = aX(a^{-1}Y)^{-1} = aXY^{-1}a^{-1} = aUa^{-1}$ となり、自然に Lorentz 変換が導入される。… Lorentz 変換の行列ベクトルによる自然な表現である。

特に、 $u_0 = 1$ のとき $(u_1)^2 - (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 = 0$ は $\mathbb{R}^{1,3}$ に立体射影すると測地線は $(ct)^2 - (x)^2 - (y)^2 - (z)^2 = 0$ (光の軌道) となる。

また、 x 方向に速度 $\frac{v_x}{c} = \tanh \theta_0$ をもつ粒子の測地線は $(u_0, \sqrt{1-u_0^2} \cosh \theta_0, \sqrt{1-u_0^2} \sinh \theta_0, 0, 0)$ ($-1 \leq u_0 \leq 1$) であり、Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ では $(ct \cosh \theta_0, ct \sinh \theta_0, 0, 0)$ となる。… 傾きが速度を表す。

更に、無限遠点で接続の発散 (特異点) を解消する。この為に複素反ドジッタ空間を3枚連結して無限遠点を2枚目の中に、2枚目の無限遠点を3枚目の中にもっていくようにすると、その次は1枚目と一致する。… 3枚で1組である。

ただ、複素空間では3枚で元に戻るが実空間としては、原点で直交しているため無限遠点は虚像として原点と重なり、6枚で1組となる。… これは不思議の国のトムキンス (夢第1話 おもちゃの宇宙) が私が昔読んだときに抱いたイメージに近いものであり、違和感のないものである。



反ドジッタ空間の結合

まとめ

現実の世界

空間: Minkowski 空間。

座標変換: 全ての変換。

架空の世界

反 De-Sitter 空間。

接続が不変となる変換。

§ 5. 重力への応用 (本題)¹¹⁾

現状では重力 (空間の曲がり) と電磁気力の発生過程は非常に異なっているが、この架空空間ではどちらも同じ発生過程をたどっている。… 行列ベクトルで表される同じ形式をもつ。

① 一般に重力と電磁気力が似ていると言われているのはどちらも「逆2乗の法則」

$$f = -\frac{GMm_0}{c^2 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \text{ (重力)}, \quad \mathbf{F} = \frac{eq_0}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \text{ (電磁気力) が成り立つためである。だが、}$$

② これは出口であり、入り口に相当するポテンシャルも同じ形をしている。即ち

$$U = -\frac{GM}{c^2 r} \text{ (重力)}, \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \text{ (電磁気力) である。ということは}$$

③ 途中の発生メカニズムも似ているのではないかと思います。… だれでも考えることである。

そこで、入口から出口までの流れを整理すると、

(1) 電磁気力では

ポテンシャル $(\phi, \mathbf{A}) \rightarrow$ ポテンシャルの微分 $\rightarrow$ 電磁場 $(E_i, \mathbf{E} - ic\mathbf{B})$

$\rightarrow$ 電磁場と電荷 $(q_0, \mathbf{j})$ の相互作用 $\rightarrow$ 電磁気力 $(F_i, \mathbf{F})$

(2) 重力では太陽 M_G が静止している場合

ポテンシャル $(U, \mathbf{0}) \rightarrow$ ポテンシャルの微分 $\rightarrow$ 重力場 $(E_G, \mathbf{E}_G - ic\mathbf{B}_G)$

$\rightarrow$ 重力場と質点 $(u_0, \mathbf{u})$ の相互作用 $\rightarrow$ 四元重力 $(f, \mathbf{f})$

の過程を辿る。ここで、重力と同じ条件（太陽が静止していること）にするために電磁力でも電荷 q が静止しているとする。…②の入口をそろえる。

そうすると、ポテンシャル $(\phi, \mathbf{0}) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}, \mathbf{0} \right) \rightarrow \phi$ の微分 $\rightarrow$ 電磁場 $(E_i, \mathbf{E} - ic\mathbf{B})$ の部分(前半)は

$$\begin{pmatrix} E_i \\ \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{e}{r} \right) \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\text{grad}\phi \end{pmatrix}^+$$

であり、電場 $\mathbf{E}$ だけの発生となる。

また、電場 $(0, \mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{E}$ と電荷 $\left(q, \frac{\mathbf{j}}{c} \right)$ の相互作用 $\rightarrow$ 電磁気力 $(F_i, \mathbf{F})$ の部分(後半)は運動している電荷 $\left(q, \frac{\mathbf{j}}{c} \right) = q_0 \left(\frac{u_i}{c}, \frac{\mathbf{u}}{c} \right)$ に対して、

$$\begin{pmatrix} F_i \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} q \\ \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{j}}{c} \\ \mathbf{E}q - i\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{j}}{c} \end{pmatrix}^+ \quad \text{となり、複素力(下線部)が現れる。} \dots \text{ここが通常と}$$

異なる重要なポイントである。

これは $F_i = \frac{\mathbf{j}}{c} \cdot \mathbf{E} = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{e}{r} \right) \cdot \frac{\mathbf{u}}{c}$ (時間成分) および

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} + i \left(\frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (\text{空間成分, 下線部は複素力}) \\ &= -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{e}{r} \right) \frac{\mathbf{u}}{c} + i \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{e}{r} \right) \times \frac{\mathbf{u}}{c} \end{aligned}$$

と同等であり、①の $\mathbf{F}$ を修正したものである。

電磁気力の空間成分 $\mathbf{F}$ に複素力 (下線部) が入っているが、メトリック $(ds)^2 = (dct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$ も複素数を暗に使っており、電磁場も複素数 $(ic\mathbf{B})$ を用いていることからこだわらないほうが良い。

同様に、重力も運動している質点 $m_0 \left(\frac{u_i}{c}, \frac{\mathbf{u}}{c} \right)$ が受ける力について重力場と力は $M_G = \frac{GM}{c^2}$ (G は重力定数, M は太陽質量) とするとポテンシャルが $(U, \mathbf{0}) = \left(-\frac{M_G}{r}, \mathbf{0} \right)$ であるから、同じ過程(式変形)により、

$$f_i = m_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right) \cdot \frac{\mathbf{u}}{c} \quad \text{および}$$

$$\mathbf{f} = m_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right) \frac{\mathbf{u}}{c} - im_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right) \times \frac{\mathbf{u}}{c} \quad (\text{下線部は複素力}) \quad \text{となる。}$$

ここで、 $\mathbf{f}$ の二重下線部は $r = \frac{u_i}{c} \div 1$ より、Newton の万有引力 $\mathbf{f}_N = -m_0 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = m_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right)$ と同じものであると

考えることができる。

架空の世界では粒子が静止している時と運動している時で力の大きさが異なり、特に運動している時は複素力が出てくる。

まとめ

現実の世界

力の発生：空間の曲がりによる。

力：運動・静止状態で区別がない。

架空の世界

電磁力と同じ過程を経る。

運動・静止状態で力に差が出る。

§ 6. 方程式の解釈 (発展)

Einstein の重力場の方程式 $[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}]$ は (テンソルを用いているため) 私には少々難解である。

幸いなことに、ここまでの議論で四元重力 $(f, \mathbf{f})$ が得られているので、重力の方程式を得ることができる。

一般 (古典) 的には力積 $\mathbf{f}dt$ は運動量の変化量であり、逆に運動量を微分 $\left(\frac{d}{dt} \right)$ すれば力を得る。

この関係から四元力 $(f, \mathbf{f})$

$$\begin{cases} f_i = m_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right) \cdot \frac{\mathbf{u}}{c} & (\text{エネルギーの変化}) \dots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{f} = m_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right) \frac{\mathbf{u}}{c} - im_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{M_G}{r} \right) \times \frac{\mathbf{u}}{c} & (\text{運動量の変化}) \dots (2) \end{cases}$$

は四元運動量 $\frac{m_0}{c} \left(\frac{dct}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \left(m_0 \frac{u_i}{c}, m_0 \frac{\mathbf{u}}{c} \right) = (m_0\gamma, m_0\gamma\beta)$ を微分 $\left(\frac{d}{dct} \right)$ したものである。…複素力の効果(重要)を含む運動方程式を得る。

固有時間で微分 $\left(\frac{d}{d\tau} = \frac{dct}{d\tau} \cdot \frac{d}{dct} \right)$ し行列ベクトル、更にローレンツ形式で表すと、

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{pmatrix} &= -M_G m_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial ct}{\partial \mathbf{r}} \\ -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \frac{dct}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{pmatrix} \frac{d\tau}{dct} \\ &= -\frac{M_G m_0}{r^2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right) \\ \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{dct}{d\tau} \right)^2 - i \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) \left(\frac{dct}{d\tau} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。…左辺は四元運動量の微分、右辺は四元力である。

この方程式に全ての情報が含まれていると考えられる。このままでもよいが、分析・解釈をしやすくする為に球面座標で書き直すことにすると、直交座標から極座標への変換

$$\begin{cases} ct = ct \\ x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

を用いて運動方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 ct}{dt^2} &= -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dct}{dt} && \cdots \text{時間方向(1)} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \right)^2 && \cdots \text{半径方向(2)} \\ \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) &= -i \frac{M_G}{r^2} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{dct}{dt} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) + \cos \theta \frac{d\phi}{dt} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \right) && \cdots \text{緯度方向(3)} \\ \frac{d}{dt} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \right) &= i \frac{M_G}{r^2} \left(r \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{dct}{dt} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \right) - \cos \theta \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} && \cdots \text{経度方向(4)} \end{aligned}$$

の形になる。これは複素力を含む方程式であるが太陽 $M_G \left(= \frac{GM}{c^2} \right)$ の周りを惑星が赤道 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) を移動している場合、 $\theta = \frac{\pi}{2} - i\Omega$ (Ω : 虚角, 回転速度により定まる) で置き換えると純粋に実の式だけの方程式になる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 ct}{dt^2} &= -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dct}{dt} && \cdots (1)' \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \left(r \frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \right\} && \cdots (2)' \\ \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\Omega}{dt} \right) &= \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{dt} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right) \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right) - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \left(r \frac{d\Omega}{dt} \right) && \cdots (3)' \\ \frac{d}{dt} \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right) &= \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{dt} - \sinh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right) \left(r \frac{d\Omega}{dt} \right) - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right) && \cdots (4)' \end{aligned}$$

この方程式を分析(解釈)することになるが、ここまでくると相対性理論は特殊も一般もなくこの方程式の解釈一つにかかわってくる。

現在の一般相対性理論はコペルニクス以前の周転円(天動説のための論理)の様相を呈しており、非常に複雑(難解)になっている。・・・同じ結果を得るなら単純(地動説)なほうが良い。

((解釈の1例))時間方向成分(1)について

$$\frac{d^2 ct}{dt^2} = -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dct}{dt} \text{ より } \frac{d}{dt} \log \left(\frac{dct}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{M_G}{r} \right) \therefore \log \left(\frac{dct}{dt} \right) = \frac{M_G}{r} + c_0$$

よって $\frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} = \frac{dct}{dt} = c e^{\frac{M_G}{r} + c_0} = C_0 e^{\frac{M_G}{r}}, c e^{c_0} = C_0$ となる。この式を展開して、

$$1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \cdots = C_0 \left\{ 1 + \frac{M_G}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{M_G}{r} \right)^2 + \cdots \right\}$$

これに質点 m_0 をかけ、静止状態を考えれば、 $c = C_0 e^{\frac{M_G}{r}} \sim C_0$, $M_G = \frac{GM}{c^2}$ であるから、 $m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots = m_0 c^2 + G \frac{M m_0}{r} + \cdots$ となり、これはエネルギー保存則を意味している。

残りの式全てを書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{dct}{dt} &= C_0 e^{\frac{M_G}{r}} && \cdots \cdots \text{(全エネルギー)} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^3} && \cdots \cdots \text{(視線方向の加速度)} \\ \frac{d^2}{dt^2} (r \sinh \Omega) &= - \left(\frac{M_G}{r^2} \frac{dct}{dt} \right) \left(\tanh \Omega - r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right) \cosh \Omega \left(\frac{dct}{dt} \right) && \cdots \cdots \text{(空間の構造)} \\ r^2 \left\{ \left(r \cosh \Omega \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \left(r \frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \right\} &= C^2 && \cdots \cdots \text{(面積速度一定)} \end{aligned}$$

である。

まとめ

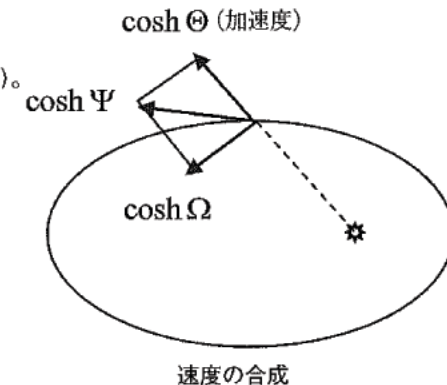
現実の世界	架空の世界
相対性理論: 特殊・一般相対性理論がある。	方程式に全ての情報がある。
複素力: 考えない。	複素力が有効に働いている。

(発展例)

- (1) 虚角 Ω の意味・・・回転方向の速度で決定される。
- (2) 相対論的速度の合成・・・右図 ($\cosh \Psi = \cosh \Theta \cosh \Omega$)。
- (3) 水星の近日点移動
- (4) 光の屈折他相対性理論の検証。

(今後の課題)

- (5) 一般物理学への適用。
- (6) 量子力学への応用



あとがき

以上の論文は今までの著者の著述をもとに電磁気学から重力の方程式まで一つのストーリーにまとめ上げたもので、その過程で多くの発見がありました。

それも含めていろんな主義・主張があると思いますが、現代物理学を中心として著者の立ち位置・主張を明確にするため、この表題を選びまたそれに適った形式をとっています。

最後に、この論文作成にあたり助言・指摘をいただきました杉浦嘉雄先生、島元世秀先生に感謝いたします。

References

- (1) G. Gamow, Mr. Tompkins in Wonderland Cambridge: at The University Press. (1939, 1950)
伏見康治訳 不思議の国のトムキンス (白揚社1966)
- [A] 時間成分の導入
(2) Y. Takemoto, An extension of Maxwell's equations and the deduction from a Yang-Mills functional Bull. of NBU Vol. 19, No. 2 (1991-Oct.)
- [B] 反ドジッタ空間
(3) Y. Takemoto, "Pseudo"-Fiber Bundle and Connection on it Bull. of NBU Vol. 20, No. 1 (1992-Feb.)
(4) Y. Takemoto, The Transformation Group on an Extended Hopf Fiber Bundle and Its Associated Bundle Bull. of NBU Vol. 20, No. 2 (1992-Oct.)
- [C] ゲージと重力
(5) Y. Takemoto, A Gauge Theory on the Anti-de Sitter Space Bull. of NBU Vol. 21, No. 1 (1993-Feb.)
(6) Y. Takemoto, A 4-dimensional Force and Electromagnetism Bull. of NBU Vol. 21, No. 2 (1993-Oct.)
(7) Y. Takemoto, Vector Analysis on Time-Space Bull. of NBU Vol. 24, No. 1 (1996-Feb.)

(8) Y. Takemoto, Gravitational Force and the 4-dimensional Complex Force Bull. of NBU Vol. 25, No. 1 (1997 - Mar.) pp. 251 - 258.

[D] 行列ベクトル導入後の展開

(9) Y. Takemoto, New Notation and Relativistic Form of the 4-dimensional Vector in Time-Space, Bull. of NBU Vol. 34, No. 1 (2006 - Mar.) pp. 32 - 38.

(10) Y. Takemoto, A New Form of Equation of Motion for a Moving Charge and the Lagrangian, Bull. of NBU Vol. 35, No. 1 (2007 - Mar.) pp. 1 - 9.

(11) Y. Takemoto, The Equation of Gravitational Force and the Electromagnetic Force, Bull. of NBU Vol. 36, No. 2 (2008 - Mar.) pp. 14 - 22.

(<http://www.ocn--catv.ne.jp/~issunzuri/genko.html>) . . . 参考にしてください。
