極大ベキ零リー環の次元について

竹　本　義　夫

On Dimension of Maximal Nilpotent Lie Algebra

By Yoshio TAKEMOTO

College of Liberal Arts & Sciences,
Nippon Bunri University

日 本 文 理 大 学 紀 要
第15巻　第1号
昭和62年2月

日本文理大学紀要　第15巻第1号　1987年2月

極大ベキ零リー環の次元について*

竹　本　義　夫**

On Dimension of Maximal Nilpotent Lie Algebra

By Yoshio TAKEMOTO

College of Liberal Arts & Sciences,
Nippon Bunri University

Abstract

We got the basis of the maximal nilpotent Lie Algebra for 2-rank, 9-step and 3-rank, 4-step. In this paper, furthermore, we get the dimensional formulas of the maximal one of nilpotent Lie algebra for n-rank, 5-step. And we calculate some formulas for this purpose.

§1．序

2-rank の場合，9-step までのベキ零リー環については基底が得られている[3,4]が，一般の場合に基底を具体的に求めるのは困難である。ここでは，5-step までの極大ベキ零リー環の次元を n-rank の場合に求める。その準備として§3で部分的に一次独立な元の個数を求め，これを用いて計算する。

§2．準　　備

定義1．R上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が次の条件を満たすときR上のリー環という。

(1) $[X, Y]+[Y, X]=0$　　　　$X, Y\in\mathfrak{g}$

(2) $[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0$　　　　$X, Y, Z\in\mathfrak{g}$

定義2．整数 $k\geqq 0$ に対し，$\mathfrak{g}_k$，$\mathfrak{M}_{k+1}$ を帰納的に次の様に定義する

$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_1=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0]$，…，$\mathfrak{g}_k=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$

更に，

$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ の基底の代表元を x_1，x_2，…，x_n，その個数を rank という。

$\mathfrak{M}_1=\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$，$\mathfrak{M}_2=[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1]$，…，$\mathfrak{M}_k=[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_{k-1}]$

定義3．R上のリー環 $\mathfrak{g}$ が

適当な整数 $n\geqq 0$ に対し $\mathfrak{g}_n=\{0\}$ が成り立つとき $\mathfrak{g}$ をベキ零という。また $\mathfrak{g}_{k-1}\neq\{0\}$，$\mathfrak{g}_k=\{0\}$ となる k を step という。

このとき，定義1の(1)，(2)は，整数 k，$k'\geqq 1$ に対し，次の条件で置き換える事が出来る。

*昭和61年9月29日受理　**一般教育助教授

(1)′ $[x, Y]=-[Y, x]$　　　　$x\in\mathfrak{M}_1$，$Y\in\mathfrak{M}_k$

(2)′ $[[x, Y], Z]=[x, [Y, Z]]-[Y, [x, Z]]$　　　　$x\in\mathfrak{M}_1$，$Y\in\mathfrak{M}_k$，$Z\in\mathfrak{M}_{k'}$

§3．基底の計算

$\mathfrak{M}_k$ を構成する $\mathfrak{M}_1$ の元により次の様に分割する。

$\mathfrak{M}_1$ の異なる元が s 種類で，数の多い方から n_1，n_2，… n_s 個である $\mathfrak{M}_k$ の元の集合を $m(n_1, n_2, \cdots, n_s)'$ この中の一次独立な元の組を $m(n_1, n_2, \cdots, n_s)$ また $d(n_1, n_2, \cdots, n_s)=\dim\ m(n_1, n_2, \cdots, n_s)$ とする。

$\mathfrak{M}_k$ の元を略記号で $x_1\cdots x_{k-1}x_k=[x_1, \cdots, [x_{k-1}, x_k]\cdots]$，$x_i\in\mathfrak{M}_1$ $(1\leqq i\leqq k)$ とする。

補題1．$\mathfrak{g}$ を n-rank のベキ零リー環とする。そのとき

i) $d(1, \overset{k}{\cdots}, 1)=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k}$ $(k\geqq 1)$

ii) $d(k)=0$　$(k\geqq 2)$

iii) $d(k-1, 1)=n(n-1)$ $(k\geqq 3)$

証明

i) a．$k=1$ のとき $d(1)=n$ である。

b．$k=m$ とき成り立つとする。そのとき

$m(1, \overset{m}{\cdots}, 1)\ni x_2\cdots x_{m+1}$ に対して，$x_1x_2\cdots x_{m+1}$ $(n-m$ 個$)$ で $m(1, \overset{m+1}{\cdots}, 1)'$ の元が得られ，関係式

$$x_1x_2\cdots x_{m+1}=-[x_2\cdots x_{m+1}, x_1] \qquad \because (1)'$$

$$=x_2x_1x_3\cdots x_{m+1}-x_3[x_2x_1, x_2\cdots x_{m+1}]+$$

$$\cdots+(-1)^{m+1}x_{m+1}x_m\cdots x_1 \qquad \because (2)'$$

は，先頭が x_1 の元と先頭が x_1 以外の元との関係を表わす。故に

$$d(1, \overset{m+1}{\cdots}, 1)=d(1, \overset{m}{\cdots}, 1)\times(n-m)\times\frac{m}{m+1}$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{m+1}$$

ii) $x\overset{k}{\cdots}x=x\overset{k-2}{\cdots}x[x, x]=0$ $\qquad \because (1)'$

iii) a．$k=3$ のとき

$m(1, 1)\ni xy$ に対して，yxy か xxy で $m(2, 1)'$ の元が得られ，関係式

$$yxy=-[x, y]y \qquad \because (1)'$$

$$=-xyy+yxy \qquad \because (2)'$$

$$=yxy \qquad \because (1)'$$

は自明な式であり，xxy も同じ式を得る。また $d(1, 1)=n(n-1)/2$ だから

$d(2, 1)=d(1, 1)\times 2=n(n-1)$

b．$k=m$ のとき成り立つとする。そのとき

$m(m-1, 1)\ni y\overset{m-2}{\cdots}yxy$ に対して，$y\overset{m-1}{\cdots}yxy$ で $m(m, 1)'$ の元が得られ，関係式

$$y\overset{m-1}{\overbrace{\cdots}}yxy=-[y,\ y\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}yxy]\,y \qquad \because(1)'$$
$$=-y[y\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}yxy,\ y]+[y\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}yxy,\ yy] \qquad \because(2)'$$
$$=y\overset{m-1}{\overbrace{\cdots}}yxy \qquad \because(1)'$$

は自明な式であるから

$$d(m,\ 1)=d(m-1,\ 1)=n(n-1)$$

q．e．d．

補題２．$\mathfrak{g}$ を n-rank のベキ零リー環とする。そのとき

i）$d(2,\ 1,\ 1)=\dfrac{3n(n-1)(n-2)}{2}$

ii）$d(k-2,\ 1,\ 1)=d(k-3,\ 1,\ 1)+d(k-2,\ 1)\times\dfrac{n-2}{2}$　$(k\geqq 5)$

証明

i）

$m(1,\ 1,\ 1)\ni xyz$ に対して，$zxyz$, $yxyz$, $xxyz$ で，また

$m(2,\ 1)\ni zxz$ に対して，$xzyz$($n-2$個) で$m(2,\ 1,\ 1)'$の元が得られ，関係式

$$zxyz=-[x,\ yz]z \qquad \because(1)'$$
$$=-x[yz,\ z]+[yz,\ xz] \qquad \because(2)'$$
$$=xzyz+yzxz-zyxz \qquad \because(1)'$$

は$m(2,\ 1)$から得られる元 $xzyz$, $yzxz$ の間の関係式であり，$yxyz$, $xzyz$ も同じ式，また$xxyz$は自明な式となる。故に

$$d(2,\ 1,\ 1)=d(1,\ 1,\ 1)\times 3+d(2,\ 1)\times\frac{n-2}{2}$$
$$=\frac{3n(n-1)(n-2)}{2}$$

ii）a．$k=5$のとき

$m(2,\ 1,\ 1)\ni zyxz$(または $yyxz$, $xyxz$), $zxyz$(または $xxyz$, $yxyz$), $xzyz$ に対して，$zzyxz$, $zzxyz$, $zxzyz$ で，また

$m(3,\ 1)\ni zzxz$, $zzyz$ に対して，$xzzyz$（$n-2$個），$yzzxz$（$n-2$個）で$m(3,\ 1,\ 1)'$の元が得られ，関係式

$$zxzyz=-[x,\ zyz]z \qquad \because(1)'$$
$$=-x[zyz,\ z]+[zyz,\ xz] \qquad \because(2)'$$
$$=xzzyz+z[yz,\ xz]-yzzxz+zyzxz \qquad \because(1)'$$

は$m(3,\ 1)$ から得られる元 $xzzyz$, $yzzxz$ の間の関係式であり，$xzzyz$, $yzzxz$ も同じ式，また $zzyxz$, $zzxyz$ は自明な式となる。故に

$$d(3,\ 1,\ 1)=d(2,\ 1,\ 1)+d(3,\ 1)\times\frac{n-2}{2}$$

b．$k=m$のとき成り立つとする。そのとき

$m(m-2,\ 1,\ 1)\ni z\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyxz$, $z\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zxyz$, …, $xz\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyz$対して，$z\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyxz$, $z\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxyz$, …, $zxz\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyz$ で，また

$m(m-1,1)\ni z\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxz$, $z\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyz$ に対して，$xz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyz$($n-2$個), $yz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxz$($n-2$個)で$m(m-1,\ 1,\ 1)'$の元が得られ，関係式

$$zxz\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyz=-[x,\ z\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyz]\,z \qquad \because(1)'$$
$$=-x[z\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyz,\ z]+[z\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zyz,\ xz] \qquad \because(2)'$$
$$=xz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyz+z[z\overset{m-4}{\overbrace{\cdots}}zyz,\ xz]-$$
$$\cdots+(-1)^{m}yz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxz+(-1)^{m+1}zyz\overset{m-3}{\overbrace{\cdots}}zxz \qquad \because(1)'$$

は$m(m-1,\ 1)$から得られる元 $xz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyz$, $yz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxz$ の間の関係であり，$xz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyz$, $yz\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxz$ も同じ式，また $z\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zyxz$, $z\overset{m-2}{\overbrace{\cdots}}zxyz$, …, $zzxz\overset{m-4}{\overbrace{\cdots}}zyz$ は自明な式となる。故に

$$d(m-1,\ 1,\ 1)=d(m-2,\ 1,\ 1)+d(m-1,\ 1)\times\frac{n-2}{2}$$

q．e．d．

補題３．$\mathfrak{g}$ を n-rank のベキ零リー環とする。そのとき

i）$d(2,\ 2)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

ii）$d(3,\ 2)=2n(n-1)$

iii）$d(2,\ 2,\ 1)=3n(n-1)(n-2)$

iv）$d(2,\ 1,\ 1,\ 1)=2n(n-1)(n-2)(n-3)$

証明

i）

$m(2,\ 1)\ni yxy$, xxy に対して，$xyxy$, $yxxy$ で$m(2,\ 2)'$の元が得られ，関係式

$$xyxy=-[y,\ xy]x \qquad \because(1)'$$
$$=-y[xy,\ x]+[xy,\ yx] \qquad \because(2)'$$
$$=yxxy \qquad \because(1)'$$

は$m(2,\ 1)$ から得られる元 $xyxy$, $yxxy$ の間の関係式であり，$yxxy$ も同じ式を得る。故に

$$d(2,\ 2)=d(2,\ 1)\times\frac{1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

ii）

$m(2,\ 2)\ni xyxy$ に対して，$yxyxy$, $xxyxy$ で，また

$m(3,\ 1)\ni yyxy$ に対して，$xyyxy$ で$m(2,\ 1,\ 1)'$の元

が得られ，関係式

$$yxyxy=-[x,\ yxy]\,y \qquad \because(1)'$$
$$=-x[yxy,\ y]+[yxy,\ xy] \qquad \because(2)'$$
$$=xyyxy+y[xy,\ xy]-xyyxy+yxyxy \qquad \because(1)'$$
$$=yxyxy$$

は自明な式であり，$xxyxy$, $xyyxy$ も自明な式となる。故に

$$d(3,\ 2)=d(2,\ 2)\times 2+d(3,\ 1)=2n(n-1)$$

iii)

$m(2,\ 1,\ 1)\ni$ zyxz, zxyz, xzyz に対して，yzyxz, yzxyz, yxzyz, xzyxz, xzxyz, xxzyz また

$m(2,\ 2)\ni$ yzyz に対して，xyzyz($n-2$個) $m(2,\ 2,\ 1)'$の元が得られ，関係式

$$\begin{aligned} yzyxz &= -[z,\ yxz]y && \because (1)' \\ &= -z[yxz,\ y]+[yxz,\ zy] && \because (2)' \\ &= zyyxz+y[xz,\ zy]-[xz,\ yzy] && \because (1)' \\ &= zyyxz+y[xz,\ zy]-xzyzy+zxyzy && \because (1)' \end{aligned}$$

は$m(2,\ 2)$ から得られる元 xyzyz(＝－xzyzy) と$m(2,\ 1,\ 1)$ から得られる元 yzyxz の間の関係式であり，yxzyz, xzxyz, xyzyz も同様の関係式，また yzxyz, xzyxz, xxzyz は自明な式を得る。故に

$$d(2,\ 2,\ 1)=d(2,\ 1,\ 1)\times 2=3n(n-1)(n-2)$$

iv)

$m(1,\ 1,\ 1,\ 1)\ni$ wxyz に対して，zwxyz, ywxyz, xwxyz, wwxyz で，また

$m(2,\ 1,\ 1)\ni$ zxyz, zyxz, xzyz に対して，wzxyz($n-3$個)，wzyxz($n-3$個)，wxzyz ($n-3$個) で$m(2,\ 1,\ 1,\ 1)'$の元が得られ，関係式

$$\begin{aligned} zwxyz &= -[w,\ xyz]z && \because (1)' \\ &= -w[xyz,\ z]+[xyz,\ wz] && \because (2)' \\ &= wzxyz+x[yz,\ wz]-[yz,\ xwz] && \because (1)' \\ &= wzxyz+x[yz,\ wz]-yzxwz+zyxwz && \because (1)' \end{aligned}$$

は$m(2,\ 1,\ 1)$からの元 wzxyz, $x[yz,\ wz]$, yzxwz の間の関係式であり，wzxyz も同じ式，ywxyz と wzyxz, xwxyz と wxzyz は同様の関係式，また wwxyz は自明な式を得る。故に

$$\begin{aligned} d(2,\ 1,\ 1,\ 1) &= d(1,\ 1,\ 1,\ 1)\times 4+d(2,\ 1,\ 1)\times\frac{2(n-3)}{3} \\ &= 2n(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

q. e. d.

§4．極大ベキ零リー環の次元

$\mathfrak{g}$ を n-rank のベキ零リー環とする。

(i) 1-step の場合

補題１より

$$d(1)=n$$

$$\therefore \dim\mathfrak{g}=\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)=n$$

(ii) 2-step の場合

補題１より

$$d(2)=0,\quad d(1,\ 1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore \dim(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore \dim\mathfrak{g}=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

(iii) 3-step の場合

補題１より

$$d(2,\ 1)=n(n-1)$$

$$d(1,\ 1,\ 1)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$\therefore \dim(\mathfrak{g}_2/\mathfrak{g}_3)=n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

$$\therefore \dim\mathfrak{g}=\frac{(n+1)n}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3}=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

(iv) 4-step の場合

補題１より

$$d(3,\ 1)=n(n-1)$$

補題３より

$$d(2,\ 2)=\frac{n(n-1)}{2}$$

補題２より

$$d(2,\ 1,\ 1)=\frac{3n(n-1)(n-2)}{2}$$

補題１より

$$d(1,\ 1,\ 1,\ 1)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dim(\mathfrak{g}_3/\mathfrak{g}_4) &= n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{2} \\ &\quad +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dim\mathfrak{g} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)(n-1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2+n+2)}{12} \end{aligned}$$

(v) 5-step の場合

補題１より

$$d(4,\ 1)=n(n-1)$$

補題３より

$$d(3,\ 2)=2n(n-1)$$

補題2より

$$d(3,1,1)=d(2,1,1)+d(3,1)\times\frac{n-2}{2}$$
$$=\frac{3n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$
$$=2n(n-1)(n-2)$$

補題3より

$$d(2,2,1)=3n(n-1)(n-2)$$
$$d(2,1,1,1)=2n(n-1)(n-2)(n-3)$$

補題1より

$$d(1,1,1,1,1)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5}$$

$$\therefore \dim(\mathfrak{g}_4/\mathfrak{g}_5)=n(n-1)+2n(n-1)+2n(n-1)(n-2)+3n(n-1)(n-2)$$
$$+2n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5}$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)(n^2+1)}{5}$$

$$\therefore \dim\mathfrak{g}=\frac{n(n+1)(3n^2+n+2)}{12}+\frac{n(n+1)(n-1)(n^2+1)}{5}$$
$$=\frac{n(n+1)(12n^3+3n^2+17n-2)}{60}$$

定理4．極大ベキ零リー環 $\mathfrak{g}$ (n-rank) の次元は次の様になる。

	$\mathfrak{g}$ の次元	$\mathfrak{g}_{k-1}/\mathfrak{g}_k$ の次元
1−step	n	n
2−step	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
3−step	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$
4−step	$\frac{n(n+1)(3n^2+n+2)}{12}$	$\frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}$
5−step	$\frac{n(n+1)(12n^3+3n^2+17n-2)}{60}$	$\frac{n(n+1)(n-1)(n^2+1)}{5}$

References

(1) H. Fujiwara, *Affine structures of some solvable Lie groups,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 33 (1979), 346-353.

(2) Y. Takemoto, *Study on construction of an affine structure of nilpotent Lie groups,* Bull. Oita Inst. Tech., 10 (1982), 126-132.

(3) Y. Takemoto, *On Classification of Nilpotent Lie Algebra,* Bull, Nippon Bunri Univ., 11 (1982), 206-227.

(4) Y. Takemoto, *On Structure of Maximal Nilpotent Lie Algebra,* Bull, Nippon Bunri Univ., 13 (1985), 86-93.

(5) S. Yamaguchi, *Derivations and affine structures of some nilpotent Lie algebras,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 34 (1980), 151-170.