極大ベキ零リー環の構造について

竹　本　義　夫

On Structure of Maximal Nilpotent Lie Algebra

By Yoshio TAKEMOTO

日 本 文 理 大 学 紀 要
第13巻　第1号
昭和60年2月

極大ベキ零リー環の構造について*

竹　本　義　夫**

On Structure of Maximal Nilpotent Lie Algebra

By Yoshio TAKEMOTO

College Liberal Arts & Sciences,
Nippon Bunri University

Abstract

We introduce the maximal one of nilpotent Lie algebra and reconstruct the basis with the view of symmetrizing its structure.

At last, we show these basis and linear relations of 9-step nilpotent Lie algebra of rank 2.

§1. 序

ベキ零リー環を分類[1]する為に極大ベキ零リー環を定義し，その部分空間として任意のベキ零リー環をとらえた[2]。ここでは全体像をとらえる為に対称性を考慮しながら極大ベキ零リー環の基底を再構成する。

§2. 準　　備

定義　1.　$\mathbf{R}$上の k-step ベキ零リー環$\mathfrak{g}$とは，次の様な一次写像が存在する$\mathbf{R}$上のベクトル空間である。

(1)　$[x, y]+[y, x]=0 \quad x, y\in\mathfrak{g}$

(2)　$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \quad x,y,z\in\mathfrak{g}$

(3)　$\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，$\mathfrak{g}^{(h)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(h-1)}]$$(2\leqq h\leqq k)$とするとき，$\mathfrak{g}^{(k)}=0$，$\mathfrak{g}^{(k-1)}\neq 0$

補題　2.　$\mathfrak{g}$をベキ零リー環とすると，$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$の基底の代表元 $x_1, x_2\cdots\cdots, x_n$ で$\mathfrak{g}$を生成することができる。このnをrank という。

定義　3.　k-step，n-rank のベキ零リー環の中で最大次元をもつものを極大ベキ零リー環という。

$\mathfrak{M}=\bigcup_{l=1,\cdots,n}\mathfrak{M}_l=\{[x_{i(k-1)},\cdots\cdots,[x_{i(2)}, x_{i(1)}\cdots]\cdots]/1\leqq i(1), i(2),\cdots\cdots i(k-1)\leqq n\}$ とおく。

補題　4.　（竹本[2]）

"定義　1." の(1)，(2)は次の式と同値である。

(1)　$[x, Y]=-[Y, x]$ $(x\in\mathfrak{M}_1, Y\in\mathfrak{M})$

(2)　$[[x, Y], Z]=[x,[Y, Z]]-[Y,[x, Z]]$ $(x\in\mathfrak{M}_1, Y\in\mathfrak{M}, Z\in\mathfrak{M})$

§3. 不変部分空間

極大ベキ零リー環$\mathfrak{g}$ の rank を2とし，その生成元を x_1, x_2 とする。

*昭和59年9月28日受理　**一般教育講師

$\mathfrak{g}$上　$x_1\longrightarrow a x_1+b x_2$，$x_2\longrightarrow c x_1+d x_2$ $(A=ad-bc\neq 0)$ から誘導される線形写像をfとする。

"補題　4." (1)，(2)の関係式で$\mathfrak{g}$の基底を選んでゆくが，これを線形写像fにより不変であるようにする。

その為に以下の方法で不変部分空間を求める。

$$f:[x_1, x_1]\to[a x_1+b x_2, a x_1+b x_2]$$
$$=a^2[x_1, x_1]+ab([x_1, x_2]+[x_2, x_1])+b^2[x_2, x_2]\cdots\cdots[1]$$

これより $[x_1, x_1]$，$[x_1, x_2]+[x_2, x_1]$，$[x_2, x_2]$ は同一の不変部分空間にはいり，しかも全て0である。

$$f:[x_1, x_2]-[x_2, x_1]\to[a x_1+b x_2, c x_1+d x_2]-[c x_1+d x_2, a x_1+b x_2]$$
$$=(ad-bc)([x_1, x_2]-[x_2, x_1])\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[2]$$

これより $[x_1, x_2]-[x_2, x_1]$ はfの固有ベクトルである。

以後，次の様な省略形を用いる。

(1)　$a*[x, y]=a[x, y]$　（スカラー積）

$i_h\, i_{h-1}\cdots i_1 X=[x_{i(h)}[x_{i(h-1)}\cdots,[x_{i(1)}, X]\cdots\cdots]]$ $(a\in\mathbf{R}, x, y\in\mathfrak{g}, X\in\mathfrak{M}, 1\leqq h\leqq k-1)$

(2)　$(0, 0)=12-21$

$(m, 0)=1(m-1, 0)$

$(m, n)=2(m-1, n-1)+1(m-1, n)$

$(m, m)=2(m-1, m-1)$ $(m\geqq 1, 1\leqq n\leqq m-1)$

$(m, m+1+n)=(m-n-1)*2(m-1, n)-(n+1)*1(m-1, n+1)$ $(m\geqq 2, 0\leqq n\leqq m-2)$

補題　5.　$\mathfrak{g}$のベクトル $(m, 0)$ と$(m+2, m+3)$ $(m\geqq 1)$ は異なる不変部分空間を生成し，その空間上fは同一の作用をする。

証明　次の "補題6." と "補題7." により明らか。　Q.E.D.

$$D^n=\frac{1}{n!}\left(c\frac{\partial}{\partial a}+d\frac{\partial}{\partial b}\right)^n \text{とする。}$$

補題　6.　$\mathfrak{g}$の基底 (m, n) $[(0\leqq n\leqq m)]$ はfにより次の作用を受ける。

$$(m, n)\to A*\{D^n(a^m)(m, 0)+\cdots+D^n(a^{m-k}b^k)(m, k)+\cdots+D^n b^m(m, m)\} \quad (0\leqq k\leqq m)$$

証明　数学的帰納法による

i）$m=0$，$n=0$のとき $f\{(0, 0)\}=A*(0, 0)$ だから成立する。

ii）m，$n\geqq 0$のとき成立とする

$f\{(m+1, n)\}=f\{\underline{2(m, n-1)}+1(m, n)\}$ の展開に於ける $(m+1, k)$ $(0\leqq k\leqq m+1)$ の係数は，

$$A D^{n+1}(a^{m+1-k} b^k)$$
$$=A\{c D^{n-1}(a^{m-k} b^k)+a D^n(a^{m-k} b^k)\}$$
$$\underline{=A\{dD^{n-1}(a^{m+1-k} b^{k-1})+bD^n(a^{m+1-k}b^{k-1})\}}$$

である。

$$\because\ D^n(a^{m+1-k} b^k)=D^n(a^{m-k} b^k a)$$
$$=aD^n(a^{m-k} b^k)+\frac{1}{n}{}_nC_1\, cD^{m-1}(a^{n-k} b^k)$$
$$=aD^n(a^{m-k} b^k)+cD^{n-1}(a^{m-k} b^k)$$

$$\underline{D^n(a^{m+1-k} b^k)=D^n(a^{m+1-k} b^{k-1} b)}$$
$$\underline{=bD^n(a^{m+1-k} b^{k-1})+\frac{1}{n}{}_nC_1 dD^{n-1}(a^{m+1-k} b^{k-1})}$$
$$\underline{=bD^n(a^{m+1-k} b^{k-1})+dD^{n-1}(a^{m+1-k} b^{k-1})}$$

（但し$n=0$のとき下線部を除く）

$f\{(m, n+1\}=f\{2(m-1, n)\underline{+1(m-1, n+1)}\}$ の展開に於ける (m, k) $(0\leqq k\leqq m)$ の係数は，

$$AD^{n+1}(a^{m-k}b^k)$$
$$=A\{dD^n(a^{m-k} b^{k-1})+bD^{n+1}(a^{m-k} b^{k-1})\}$$
$$\underline{=A\{cD^n(a^{m-1-k} b^k)+aD^{n+1}(a^{m-1-k} b^k)\}}$$

である。

$\because\ D^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k})=D^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k-1}\ b)$

$=bD^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k-1})+\frac{1}{n+1}{}_{n+1}C_1\ dD^{n}(a^{m-k}\ b^{k-1})$

$=bD^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k-1})+dD^{n}(a^{m-k}\ b^{k-1})$

$\underline{D^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k})=D^{n+1}(a^{m-1-k}\ b^{k}\ a)}$

$\underline{=aD^{n+1}(a^{m-1-k}\ b^{k})+\frac{1}{n+1}{}_{n+1}C_1\ cD^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})}$

$\underline{=aD^{n+1}(a^{m-1-k}\ b^{k})+\frac{1}{n+1}{}_{n+1}C_1\ cD^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})}$

$\underline{=aD^{n+1}(a^{m-1-k}\ b^{k})+cD^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})}$

(但し n＝mのとき下線部を除く)

Q.E.D.

補題 7．g の基底 (m, m＋1＋n) (m≧2, 0≦n≦m－2) は f により次の作用を受ける。

$(m,\ m+1+n)\rightarrow A*\{D^{n}a^{m}(m,\ m+1)+\cdots+D^{n}a^{m-k}b^{k}(m,\ m+1+k)+\cdots+D^{n}b^{m}(m,\ 2m-1)\}$

$(0\leqq k\leqq m-2)$

証明 数学的帰納法による

i) m＝2のとき n＝0 となり

$f\{(2,\ 3\}=f\{2(1,\ 0)-1(1,\ 1)\}$

$=(c*1+d*2)\{a*(1,0)+b*(1,\ 1)\}-(a*1+b*2)\{c*(1,\ 0)+b*(1,\ 1)\}$

$=(ad-bc)*\{2(1,\ 0)-1(1,\ 1)\}$

$=A*(2,\ 3)$

だから成立する。

ii) m≧2 のとき成立とする

$f\{(m+1,m+2+n)\}=f\{(m-n)*2(m,n)-(n+1)*1(m,\ n+1)\}$ の展開に於いて $(m+1,\ m+2+k)$ $[0\leqq k\leqq m-1]$ の係数を比較すると，

$(m-k)(ad-bc)D^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})$

$=(m-n)dD^{n}(a^{m-k}\ b^{k})-(n+1)bD^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k})-(k+1)(ad-bc)D^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})$

$=(m-n)cD^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k+1})-(n+1)aD^{n+1}(a^{m-1-k}\ b^{k+1})$

$\because\ n(n+1)bD^{n+1}(a^{m-k}\ b^{k})$

$=nb\{c(m-k)D^{n}(a^{m-k-1}\ b^{k})\underline{+dkD^{n}(a^{m-k}\ b^{k-1})\}}$

$=c(m-k)\{(m-n)dD^{n-1}(a^{m-1-k}\ b^{k})-(m-1-k)(ad-bc)D^{n-1}(a^{m-2-k}\ b^{k})\}$

$+\underline{dk\{(m-n)dD^{n-1}(a^{m-k}\ b^{k-1})-(m-k)(ad-bc)D^{n-1}(a^{m-1-k}b^{k-1})\}}$

$=n(m-n)dD^{n}(a^{m-k}\ b^{k})-n(m-k)(ad-bc)D^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})$

$n(n+1)aD^{n+1}(a^{m-1-k}\ b^{k+1})$

$=na\{\underline{c(m-1-k)D^{n}(a^{m-2-k}\ b^{k+1})}+d(k+1)D^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})\}$

$=c\underline{(m-1-k)\{(m-n)cD^{n-1}(a^{m-2-k}\ b^{k+1})+(k+1)(ad-bc)D^{n-1}(a^{m-2-k}\ b^{k})\}}$

$+d(k+1)\{(m-n)cD^{n-1}(a^{m-1-k}\ b^{k})+k(ad-bc)D^{n-1}(a^{m-1-k}\ b^{k-1})\}$

$=n(m-n)cD^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k+1})+n(k+1)(ad-bc)D^{n}(a^{m-1-k}\ b^{k})$

但し k＝0 の時は下線部を除く

k＝m－1 の時は波線部を除く

Q.E.D.

§4. 基底の取り換え

1(m－2, 0)＝(m－1, 0) [m≧2] だから，"補題5" を用いると，f により，1 (m, m＋1) と (m＋1, m＋2) とは同じ作用を受ける。

補題 8. f の基底の要素 (m, m＋1) (m≧2) に関して次の式が成り立つ。

$2*(2,\ 3)=-[(0,\ 0),\ (0,\ 0)]$

$2*(m+1,\ m+2)=2*1(m,\ m+1)-m*[(0,\ 0),\ (m-1,\ 0)](m\geqq 2)$

証明 $2*(m+1,\ m+2)\underline{-2*1(m,\ m+1)}$

$=2*\{m*2(m,\ 0)-1(m,\ 1)\}\underline{-2*1\{(m-1)*2(m-1,0)-1(m-1,1)\}}$

$=2m*\{21(m-1,\ 0)-12(m-1,\ 0)\}$

$=-2m*[12,\ (m-1,\ 0)]$

$=-m*[(0,\ 0),\ (m-1,\ 0)]$

(但し m＝1 のとき下線部は除く)

Q.E.D.

"補題8" により (m＋1, m＋2) (m≧1) の生成する不変部分空間を [(0, 0), (m－1, 0)] の生成する不変部分空間で置き換えることができ，

1[(0, 0), (m－1, 0)] と [12, (m, 0)]＝[(0, 0), 1(m－1, 0)] とは f により同じ作用を受ける。

更に [(0, 0), (m－1, 0)] は (m－1, 0) と同じ作用を f から受けるから [X, [(0, 0), (m－1, 0)]] と [X, (m－1, 0)] (X∈g) は同じ変化をする。

補題 9. f の基底の要素 1[(k, 0), (m, 0)] (m≧2, k≧1) に関して，次の式が成り立つ。

$1[(k,\ 0),\ (m,\ 0)]=[(k+1,\ 0),\ (m,\ 0)]+[(k,\ 0),\ (m+1,\ 0)]$

証明 $1[(k,\ 0),\ (m,\ 0)]-[(k,\ 0),(m+1,0)]$

$=1[(k,\ 0),\ (m,\ 0)]-[(k,\ 0),1(m,0)]$

$=[1(k,\ 0),\ (m,\ 0)]$

$=[(k+1,\ 0),\ (m,\ 0)]$

Q.E.D.

"補題9" により 1[(k, 0), (m, 0)] (m≧2) の生成する不変部分空間を [(k＋1, 0), (m, 0)] の生成する不変部分空間で置き換えることができ，f により同じ作用を受ける。

以上の置き換えは k＋1≧m のとき実行する。

§5. g の 基 底

補題 10. 次の式は同値である。

(1) $[iX,\ Y]=-[Y,iX]$

(2) $[X,\ iY]=-[iY,\ X]$ $(i\in\mathbf{R},\ X,Y\in\mathfrak{M})$

証明 $[iX,\ Y]=-[Y,\ iX]$

$\therefore\ [X,iY]+i[X,\ Y]=-[Y,iX]$

$\therefore\ [X,iY]=i[Y,\ X]-[Y,iX]$

$\therefore\ [X,iY]=-[iY,\ X]$

逆も成り立つ

Q.E.D.

"補題10" により基底を選ぶのに次の事に注意すればよい。

i) (m, 0) (0≦m＜k)

m＝0 のとき $(0,0)=2*12=12-21\fallingdotseq 0$

$\because\ 12=-21$

m＝1 のとき $(1,\ 0)=2*112\fallingdotseq 0$

$\because\ 112=-[12,\ 1]$

$=-1[2,\ 1]+2[1,\ 1]$

$=112$

m≧2 のとき $(m,\ 0)=11(m-2,\ 0)\fallingdotseq 0$

$\because\ 11(m-2,\ 0)=-[1(m-2,\ 0),\ 1]$

$=-1[(m-2,\ 0),\ 1]+[(m-2,\ 0),\ 11]$

$=11(m-2,\ 0)$

ii) [(m₁, 0), (m, 0)] (k≦m)

"補題5" より $m_1=m$ と $m_1+1=m$ を調べればよい。
$m_1=m$ のとき $[(m,\ 0),\ (m,\ 0)]=0$
$\because\ [(m,\ 0)(m,\ 0)]=-[(m,\ 0),\ (m,\ 0)]$
$m=m-1$ のとき
$[(m-1,\ 0),\ (m,\ 0)]$
$=-[(m,\ 0),\ (m-1,\ 0)]$
$=-1[(m-1,\ 0),\ (m-1,\ 0)]+[(m-1,\ 0),\ 1(m-1,\ 0)]$
$=[(m-1,\ 0),\ (m,\ 0)]$
故に $\{[(m_1,\ 0),\ (m,\ 0)]/m_1\leqq m\}$ は一次独立
iii) $[(m_k,\ 0),\ [(m_{k-1},\ 0),\ \cdots,\ [(m,\ 0),\ (m,\ 0)]\cdots]]$ $(m_{k-j}\leqq m_{k-j-1}+\cdots+m_1+m,\ j\leqq k)$ のとき
ii) より
$[(m_i,\ 0),\ (m_j,\ 0)]=-[(m_j,\ 0),\ (m_i,\ 0)]$ $(2\leqq i,\ j\leqq k)$
が成り立つから，各 $(m_i,\ 0)$ $(0\leqq i\leqq k,\ m_0=m)$ を生成元とみることができる。

§6. 例　(2-rank, 9-step)

$\mathfrak{g}$ の生成元 $x_1,\ x_2$ を 1，2，また $xy=[x,\ y]$ $(x,\ y\in\mathfrak{g})$ とする。
$\mathfrak{g}$ の基底 と 線形関係

$\mathfrak{M}_1$: i)　$1,2$

$\mathfrak{M}_2$: i)　$11=0,12+21=0,22=0$
ii)　$12-21\ [=(0,0)]$

$\mathfrak{M}_3$: i)　$(1,0),(1,1)$

$\because$ i)　$(1,0)\to A\{a(1,0)+b(1,1)\}$

$\mathfrak{M}_4$: i)　$(2,0),(2,1),(2,2)$
ii)　$(0,0)(0,0)=0$

$\because$ i)　$(2,0)\to A\{a^2(2,0)+ab(2,1)+b^2(2,2)\}$
ii)　$(0,0)(0,0)\to A^2(0,0)(0,0)=0$

$\mathfrak{M}_5$: i)　$(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)$
ii)　$(0,0)(1,0),(0,0)(1,1)$

$\because$ i)　$(3,0)\to A\{a^3(3,0)+a^2b(3,1)+ab^2(3,2)+b^3(3,3)\}$
ii)　$(0,0)(1,0)\to A^2\{a(0,0)(1,0)+b(0,0)(1,0)\}$

$\mathfrak{M}_6$: i)　$(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$
ii)　$(0,0)(2,0),(0,0)(2,1),(0,0)(2,2)$
iii)　$(1,0)(1,0)=0,(1,0)(1,1)+(1,1)(1,0)=0,(1,1)(1,1)=0$
iii)′　$(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)$

$\because$ i)　$(4,0)\to A\{a^4(4,0)+a^3b(4,1)+a^2b^2(4,2)+ab^3(4,3)+b^4(4,4)\}$
ii)　$(0,0)(2,0)\to A^2\{a^2(0,0)(2,0)+ab(0,0)(2,1)+b^2(0,0)(2,2)\}$
iii)　$(1,0)(1,0)\to A^2[a^2(1,0)(1,0)+ab\{(1,0)(1,1)+(1,1)(1,0)\}+b^2(1,1)(1,1)]=0$
iii)′　$(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\to A^3\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}$

$\mathfrak{M}_7$: i)　$(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)$
ii)　$(0,0)(3,0),(0,0)(3,1),(0,0)(3,2),(0,0)(3,3)$
iii)　$(1,0)(2,0),(1,0)(2,1)+(1,1)(2,0),(1,0)(2,2)+(1,0)(2,1),(1,1)(2,2)$
iii)′　$(1,0)(2,1)-2*(1,1)(2,0),2*(1,1)(2,2)-(1,0)(2,1)$
iv)　$(0,0)(0,0)(1,0),(0,0)(0,0)(1,1)$

$\because$ i)　$(5,0)\to A\{a^5(5,0)+a^4b(5,1)+a^3b^2(5,2)+a^2b^3(5,3)+ab^4(5,4)+b^5(5,5)\}$
ii)　$(0,0)(3,0)\to A^2\{a^3(0,0)(3,0)+a^2b(0,0)(3,1)+ab^2(0,0)(3,2)+b^3(0,0)(3,0)\}$
iii)　$(1,0)(2,0)\to A^2\{a^3(1,0)(2,0)+a^2b\{(1,0)(2,1)+(1,1)(2,0)\}$
$+ab^2\{(1,1)(2,2)+(1,0)(2,1)\}\}+b^3(1,1)(2,2)]$

iii)′　$(1,0)(2,1)-(1,1)(2,0)\to A^3[a\{(1,0)(2,1)-2*(1,1)(2,0)\}$
$+b\{2*(1,1)(2,2)-(1,0)(2,1)\}]$
iv)　$(0,0)(0,0)(1,0)\to A^3\{a(0,0)(0,0)(1,0)+b(0,0)(0,0)(1,1)\}$

$\mathfrak{M}_8$: i)　$(6,0),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$
ii)　$(0,0)(4,0),(0,0)(4,1),(0,0)(4,2),(0,0)(4,3),(0,0)(4,4)$
iii)　$(1,0)(3,0),(1,0)(3,1)+(1,1)(3,0),(1,0)(3,2)+(1,1)(3,1),$
$(1,0)(3,3)+(1,1)(3,2),(1,1)(3,3)$
iii)′　$(1,0)(3,1)-3*(1,1)(3,0),(1,0)(3,2)-2*(1,1)(3,1),3*(1,0)(3,3)-(1,1)(3,2)$
iv)　$(2,0)(2,0)=0,(2,0)(2,1)+(2,1)(2,0)=0,$
$(2,0)(2,2)+(2,1)(2,1)+(2,2)(2,0)=0,$
$(2,1)(2,2)+(2,2)(2,1)=0,(2,2)(2,2)=0$
iv)′　$(2,0)(2,1)-(2,1)(2,0),2*(2,0)(2,2)-2*(2,2)(2,0),(2,1)(2,2)-(2,2)(2,1)$
v)　$(0,0)(0,0)(2,0),(0,0)(0,0)(2,1),(0,0)(0,0)(2,2)$
vi)　$(1,0)(0,0)(1,0),(1,0)(0,0)(1,1)+(1,1)(0,0)(1,0),(1,1)(0,0)(1,1)$
vi)′　$(1,0)(0,0)(1,1)-(1,1)(0,0)(1,0)$
vii)　$2*\{(1,0)(0,0)(1,1)-(1,1)(0,0)(1,0)\}-(0,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}=0$

$\because$ i)　$(6,0)\to A\{a^6(6,0)+a^5b(6,1)+a^4b^2(6,2)+a^3b^3(6,3)+a^2b^4(6,4)+ab^5(6,5)+b^6(6,6)$
ii)　$(0,0)(4,0)\to A^2\{a^4(0,0)(4,0)+a^3b(0,0)(4,1)+a^2b^2(0,0)(4,2)+ab^3(4,5)+b^4(4,6)$
iii)　$(1,0)(3,0)\to A^2[a^4(1,0)(3,0)+a^3b\{(1,0)(3,1)+(1,1)(3,0)\}$
$+a^2b^2(1,0)(3,2)+(1,1)(3,1)\}+ab^3\{(1,0)(3,3)+(1,1)(3,2)\}$
$+b^3(1,1)(3,3)]$
iii)′　$(1,0)(3,1)-3*(1,1)(3,0)\to A^3[a^2\{1,0)(3,1)-3*(1,1)(3,0)\}$
$+ab\{2*(1,0)(3,2)-2*(1,1)(3,1)\}$
$+b^2\{3*(1,0)(3,3)-(1,1)(3,2)\}]$
iv)　$(2,0)(2,0)\to A^2[a^4(2,0)(2,0)+a^3b\{(2,0)(2,1)+(2,1)(2,0)\}$
$+a^2b^2\{(2,0)(2,2)+(2,1)(2,1)+(2,2)(2,0)\}$
$+ab^4\{(2,1)(2,2)+(2,2)(2,1)+b^4(2,2)(2,2)=0$
iv)′　$(2,0)(2,1)-(2,1)(2,0)\}\to A^3[a^2\{(2,0)(2,1)-(2,1)(2,0)\}$
$+ab\{2*(2,0)(2,2)-2*(2,1)(2,1)\}$
$+b^2\{(2,1)(2,2)-(2,2)(2,1)\}]$
v)　$(0,0)(0,0)(2,0)\to A^3\{a^2(0,0)(0,0)(2,0)+ab(0,0)(0,0)(2,1)+b^2(0,0)(0,0)(2,2)\}$
vi)　$(1,0)(0,0)(1,0)\to A^3[a^2(1,0)(0,0)(1,0)$
$+ab\{(1,0)(0,0)(1,1)+(1,1)(0,0)(1,0)\}$
$+b^2(1,1)(0,0)(1,1)$
vi)′　$(1,0)(0,0)(1,1)-(1,1)(0,0)(1,0)\to A^4\{(1,0)(0,0)(1,1)-(1,1)(0,0)(1,0)\}$
vii)　$(0,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}\to A^4[(0,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}]$

更に "$\mathfrak{M}_2$" の i)，"$\mathfrak{M}_6$" の iii)，"定義 1." の(2)により vi)′ と vii) については次の関係式がある。

$2*\{(1,0)(0,0)(1,1)-(1,1)(0,0)(1,0)\}-(0,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}$
$=2*\{(1,0)(0,0)(1,1)+(1,1)(1,0)(0,0)\}+(0,0)(1,1)(1,0)\}$
$=0$

$\mathfrak{M}_9$: i)　$(7,0),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,7)$
ii)　$(0,0)(5,0),(0,0)(5,1),(0,0)(5,2),(0,0)(5,3),(0,0)(5,4),(0.0)(5,5)$
iii)　$(1,0)(4,0),(1,0)(4,1)+(1,1)(4,0),(1,0)(4,2)+(1,1)(4,1),$
$(1,0)(4,3)+(1,1)(4,2),(1,0)(4,4)+(1,1)(4,3),(1,1)(4,4)$
iii)′　$(1,0)(4,1)-4*(1,1)(4,0),2*(1,0)(4,2)-3*(1,1)(4,1),$
$3*(1,0)(4,3)-2*(1,1)(4,2),4*(1,0)(4,4)-(1,1)(4,3)$
iv)　$(2,0)(3,0),(2,0)(3,1)+(2,1)(3,0),(2,0)(3,2)+(2,1)(3,1)+(2,2)(3,0),$
$(2,0)(3,2)+(2,1)(3,1)+(2,2)(3,0),(2,1)(3,3)+(2,2)(3,2),(2,2)(3,3)$
iv)′　$2*(2,0)(3,1)-3*(2,1)(3,0),4*(2,0)(3,2)-(2,1)(3,1)-6*(2,2)(3,0),$
$6*(2,0)(3,3)+(2,1)(3,2)-4*(2,2)(3,1),3*(2,1)(3,3)-2*(2,2)(3,2)$
v)　$(0,0)(0,0)(3,0),(0,0)(0,0)(3,1),(0,0)(0,0)(3,2),(0,0)(0,0)(3,3)$
vi)　$(0,0)(1,0)(2,0),(0,0)\{(1,0)(2,1)+(1,1)(2,0)\},$
$(0,0)\{(1,0)(2,2)+(1,1)(2,1)\},(0,0)(1,1)(2,2)$

vii)　$(1,0)(0,0)(2,0),(1,0)(0,0)(2,1)+(1,1)(0,0)(2,0),$
$(1,0)(0,0)(2,2)+(1,1)(0,0)(2,1),(1,1)(0,0)(2,2)$

vii)′　$(1,0)(0,0)(2,1)-2*(1,1)(0,0)(2,0),(1,0)(0,0)(2,2)-(1,1)(0,0)(2,1)$

viii)　$(0,0)(1,0)(2,0)-(1,0)(0,0)(2,0)+(2,0)(0,0)(1,0)=0$
$(0,0)\{(1,0)(2,1)+(1,1)(2,0)\}-(1,0)(0,0)(2,1)+(1,1)(0,0)(2,0)$
$+(2,0)(0,0)(1,1)+(2,1)(0,0)(1,0)=0$
$(0,0)\{(1,0)(2,2)+(1,1)(2,1)\}-(1,0)(0,0)(2,2)+(1,1)(0,0)(2,1)$
$+(2,1)(0,0)(1,1)+(2,2)(0,0)(1,0)=0$
$(0,0)(1,1)(2,2)-(1,1)(0,0)(2,2)+(2,2)(0,0)(1,1)=0$

viii)′　$2*(2,0)(0,0)(1,1)-(2,1)(0,0)(1,0),(2,1)(0,0)(1,1)-2*(2,2)(0,0)(1,0)$

ix)　$(0,0)(0,0)(0,0)(1,0),(0,0)(0,0)(0,0)(1,1)$

x)　$(0,0)\{(1,0)(2,1)-(1,1)(2,0)\},(0,0)\{(1,0)(2,2)-(1,1)(2,1)$

xi)　$(1,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\},(1,1)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}$

∵ i)　$(7,0)\rightarrow A\{a^7(7,0)+a^6b(7,1)+a^5b^2(7,2)+a^4b^3(7,3)+a^3b^4(7,4)$
$+a^2b^4(7,5)+ab^5(7,6)+b^6(7,7)\}$

ii)　$(0,0)(5,0)\rightarrow A^2\{a^5(0,0)(5,0)+a^4b(0,0)(5,1)+a^3b^2(0,0)(5,2)$
$+a^2b^2(0,0)(5,2)+ab^3(0,0)(5,4)+b^4(0,0)(5,5)\}$

iii)　$(1,0)(4,0)\rightarrow A^2[a^5(1,0)(4,0)+a^4b(1,0)(4,1)+(1,1)(4,0)\}$
$+a^3b^2\{(1,0)(4,2)+(1,1)(4,1)\}$
$+a^2b^3\{(1,0)(4,3)+(1,1)(4,2)\}$
$+ab^4\{(1,0)(4,4)+(1,1)(4,3)\}+b^5(1,1)(4,4)]$

iii)′　$(1,0)(4,1)-4*(1,1)(4,0)\rightarrow A^3[a^3\{(1,0)(4,1)-4*(1,1)(4,0)\}$
$+a^2b\{2*(1,0)(4,2)-3*(1,1)(4,1)\}$
$+ab^2[3*(1,0)(4,3)-2*(1,1)(4,2)\}$
$+b^3\{4*(1,0)(4,4)-(1,1)(4,3)\}]$

iv)　$(2,0)(3,0)\rightarrow A^2[a^5(2,0)(3,0)+a^4b\{(2,0)(3,1)+(2,1)(3,0)\}$
$+a^3b^2\{(2,0)(3,2)+(2,1)(3,1)+(2,2)(3,0)\}$
$+a^2b^3\{(2,0)(3,3)+(2,1)(3,2)+(2,2)(3,1)\}$
$+ab^4\{(2,1)(3,3)+(2,2)(3,2)\}+b^5(2,2)(3,3)]$

iv)′　$2*(2,0)(3,1)-3*(2,1)(3,0)\rightarrow A^3[a^3\{2*(2,0)(3,1)-3*(2,1)(3,0)\}$
$+a^2b\{4*(2,0)(3,2)-(2,1)(3,1)-6*(2,2)(3,0)\}$
$+ab^2\{6*(2,0)(3,3)+(2,1)(3,2)-4*(2,2)(3,1)\}$
$+b^3\{3*(2,1)(3,3)-2*(2,2)(3,2)\}]$

v)　$(0,0)(0,0)(3,0)\rightarrow A^3\{a^3(0,0)(0,0)(3,0)+a^2b(0,0)(0,0)(3,1)$
$+ab^2(0,0)(0,0)(3,2)+b^3(0,0)(0,0)(3,3)\}$

vi)　$(0,0)(1,0)(2,0)\rightarrow A^3[a^3(0,0)(1,0)(2,0))$
$+a^2b\{(0,0)\{(1,0)(2,1)+(1,1)(2,0)\}$
$+ab^2(0,0)\{(1,0)(2,2)+(1,1)(2,1)\}$
$+b^3(0,0)(1,1)(2,2)]$

vii)　$(1,0)(0,0)(2,0)\rightarrow A^4[a^3(1,0)(0,0)(2,0)$
$+a^2b\{(1,0)(0,0)(2,1)+(1,1)(0,0)(2,0)\}$
$+ab^2(1,0)(0,0)(2,2)+(1,1)(0,0)(2,1)$
$+b^3(1,1)(0,0)(2,2)]$

vii)′　$(1,0)(0,0)(2,1)-2*(1,1)(0,0)(2,0)\rightarrow A^5[a\{(1,0)(0,0)(2,1)-2*(1,1)(0,0)(2,0)$
$+b\{2*(1,0)(0,0)(2,2)-(1,1)(0,0)(2,1)\}]$

viii)　$(2,0)(0,0)(1,0)\rightarrow A^4[a^3(2,0)\{(0,0)(1,0)$
$+a^2b\{(2,0)(0,0)(1,1)+(2,1)(0,0)(1,0)\}$
$+ab^2\{(2,1)(0,0)(1,1)+(2,2)(0,0)(1,0)\}$
$+b^3(2,2)(000)(1,1)]$

viii)′　$2*(2,0)(0,0)(1,1)-(2,1)(0,0)(1,0)\rightarrow A^5\{a\{2*(2,0)(0,0)(1,1)-(2,1)(0,0)(1,0)\}$
$+b\{2,1)(0,0)(1,1)-2*(2,2)(0,0)(1,0)\}$

ix)　$(0,0)(0,0)(0,0)(1,0)\rightarrow A^5[a(0,0)(0,0)(0,0)(1,0)+b(0,0)(0,0)(0,0)(1,1)]$

x)　$(0,0)\{(1,0)(2,1)-(1,1)(2,0)\}\rightarrow A^5[a(0,0)\{(1,0)(2,1)-(1,1)(2,0)\}$
$+b(0,0)\{(1,0)(2,2)-(1,1)(2,1)\}]$

xi)　$(1,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}\rightarrow A^5[a(1,0)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}$
$+b(1,1)\{(1,0)(1,1)-(1,1)(1,0)\}]$

更に "$\mathfrak{M}_2$" の i), "定義 1." の (2)により v), vi), viii) について次のような関係式がなりたつ。

$(0,0)(1,0)(2,0)-(1,0)(0,0)(2,0)+(2,0)(0,0)(1,0)$
$=(0,0)(1,0)(2,0)+(1,0)(2,0)(1,0)+(2,0)(0,0)(1,0)$
$=0$

References

(1) G. Vrănceanu, Lecţii de geometrie diferenţială IV, Bucureşti, 1968.

(2) Y. Takemoto, On Classification of Nilpotent Lie Algebra, Bull. Nippon Bunri Univ., 11 (1982), 206—227.