# 四元時空ベクトルの行列表記とマクスウェル方程式

日本文理大学 電気・電子工学科　竹本義夫

## 提案

**四元時空ベクトルを次のように表記する**($c$ ：光速度)。

$$\begin{pmatrix} ct \\ \\ \mathbf{r} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow \begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct+x & y+iz \\ y-iz & ct-x \end{pmatrix} \in \left\{ X \in M(2,\mathbb{C}) / {}^t\overline{X} = X \right\}$$

(1) **行列としての機能性**　　(2) **ベクトルとしての簡明さ**

**をあわせ持ち、「マクスウェル方程式」等を簡便に行列表記(行列ベクトル)できる。**

**また、相対論的変換も追加表記出来、見通しがよくなる。**

(A) **四元ベクトル積(内積・外積・スカラー倍を含む)が定義できる。(複素化)**

$$\begin{pmatrix} ct & \\ & \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' & \\ & \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ctct' + \underline{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} & \\ & ct\mathbf{r}' + \mathbf{r}ct' - i(\underline{\underline{\mathbf{r}\times\mathbf{r}'}}) \end{pmatrix}$$

$\underline{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}$ ：**内積、**　$\underline{\underline{\mathbf{r}\times\mathbf{r}'}}$ ：**外積、**　$ct\mathbf{r}'$、$\mathbf{r}ct'$ ：**スカラー倍**

(B) **マクスウェル方程式の行列表記と相対論的変換。**

$$\begin{cases} \mathbf{rotE} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} & \text{(ファラデーの式)•••(1)} \\ div\mathbf{B} = 0 & \text{(磁束保存の式)•••(2)} \\ div\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(ガウスの式)•••(3)} \\ c^2\mathbf{rotB} - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} & \text{(アンペールの式)•••(4)} \end{cases}$$

⇔(3)-(2)×ci，(1)×(-i)-(4)÷c

$$\begin{cases} div(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \text{•••(2,3)} \\ \dfrac{\partial(\mathbf{E} - ic\mathbf{B})}{\partial ct} - i\mathbf{rot}(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) = -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \text{•••(1,4)} \end{cases}$$

⇔ $E_t$(電場の時間成分) $= 0$ とする。

$${}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial ct} & \\ & \nabla \end{pmatrix}^{+} {}^{-}\begin{pmatrix} E_t(=0) & \\ & \mathbf{E} - ic\mathbf{B} \end{pmatrix}^{+} = {}^{+}\begin{pmatrix} \nabla\cdot(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) & \\ & \dfrac{\partial}{\partial ct}(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) - i\nabla\times(\mathbf{E} - ic\mathbf{B}) \end{pmatrix}^{+} = {}^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ & -\dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c} \end{pmatrix}^{+}$$

詳しくは　http://www.nbu.ac.jp/~takemoto/kiyo/H18-3.doc