

E-13 水星の自転と公転

日本文理大学工学部^A, 日本文理大学工学部機械電気工学科^B 竹本義夫^A, 島元世秀^B

1. マクスウェル方程式 (拡張)、マクスウェル運動方程式 (電磁気的重力理論) と一般相対性理論

(a) マクスウェル方程式 (拡張) $\Rightarrow$ (四元電磁場, 重力場=加速度)

$$\underline{E}_t = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \text{div} c\mathbf{A} \cdots \text{時間成分}, \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{A}}{\partial ct} - \text{grad} \phi \cdots \text{電場}, c\mathbf{B} = \text{rot} c\mathbf{A} \cdots \text{磁場}$$

(b) マクスウェル運動方程式、メトリックを $ds^2 = -dct^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ とする。

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} \cdots \text{時間方向加速度}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M_G}{r^2} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r} \left\{ \left(r \frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right\} \cdots \text{動径方向加速度}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{\text{real}} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \cdot r \frac{d\theta}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdot r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdots \text{緯度方向加速度}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)_{\text{real}} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \cdot r \sin \theta \frac{d\phi}{d\tau} - \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdot r \frac{d\theta}{d\tau} \cdots \text{経度方向加速度}$$

* (a) と (b) は同値。 $\theta = \frac{\pi}{2} - i\underline{\Omega}$ (赤道上) のとき、(b) は自転に関するパラメータ Ω を含む。

(c) 一般相対性理論 $R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2 = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4$

シュバルツシルトメトリックを

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M_G}{r})dct^2 + (1 - \frac{2M_G}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, M_G = \frac{GM}{c^2} \text{ とする。}$$

* $\theta = \frac{\pi}{2}$ (赤道上) のとき、(c) には自転に関するパラメータが含まれていない。

2. 水星への応用 * 詳しくは <http://www.nbu.ac.jp/~shimamoto/genko.html>

(b) を用いて、自転と公転の速度 (太陽から見た角速度) の一致する点 r_* を求めることができる

$$\frac{\tanh \Omega_*}{r_*} (\text{自転}) = \cosh \Omega_* \frac{d\phi_*}{dct} (\text{公転})$$