Seminar Reports of Unitary Representation No.3, 1983

ユニタリ表現論
セミナー報告集III

1983年11月

職業訓練大学校数学教室

ユニタリ表現論セミナー報告集Ⅲ

目次

ベキ零リー環の分類について

日本文理大学　竹本義夫
Yoshio Takemoto

§1. 序

ベキ零リー環の分類に関しては、6次元まではG.Vrănceanuによりなされているがここではベキ零リー環の構成と分類を別の方法（極大ベキ零リー環を定義し、その部分リー環としてベキ零リー環をとらえる）で行う。

§2. $\mathfrak{g}$の基底

定義1. $\mathbb{R}$上の k−step ベキ零リー環とは、次の1次写像の存在する$\mathbb{R}$上のベクトル空間である。

(1) $[X, Y] + [Y, X] = 0 \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$

(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

(3) $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(h)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(h-1)}] \quad (h \geqq 2)$とするとき
$\mathfrak{g}^{(k)} = 0, \ \mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$

補題1. $\mathfrak{g}$をベキ零リー環, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$の基底を$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ $(n = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)})$とする。そのとき その代表元$x_1, x_2, \cdots, x_n$を用いて$\mathfrak{g}$の基底を得ることができる.

（証明）

$x_{1i}=x_i\ (1\leqq i\leqq n_1=n)$ とすると

$$\mathfrak{g}=\sum_{i=1}^{n_1}\mathbb{R}x_{1i}+\mathfrak{g}^{(1)}$$

$$\therefore\quad \mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\mathbb{R}[x_{1i},x_{1j}]+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(1)}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_2}\mathbb{R}x_{2i}+\mathfrak{g}^{(2)}$$

x_{2i}（$1\leqq i\leqq n_2$, $n_2=\dim\ \mathfrak{g}^{(1)}/\mathfrak{g}^{(2)}$）、は $\{[x_{1i},x_{1j}]/1\leqq i,j\leqq n_1\}$ の中の1次独立なベクトルの組

更に

$$\mathfrak{g}^{(2)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(1)}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\mathbb{R}[x_{1i},x_{2j}]+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(2)}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_3}\mathbb{R}x_{3i}+\mathfrak{g}^{(3)}$$

x_{3i}（$1\leqq i\leqq n_3$, $n_3=\dim\ \mathfrak{g}^{(2)}/\mathfrak{g}^{(3)}$）、は $\{[x_{1i},x_{2j}]/1\leqq i\leqq n_1,\ 1\leqq j\leqq n_2\}$ の中の1次独立なベクトルの組

これを続けて・・・

$$\mathfrak{g}^{(k-1)}=\sum_{i=1}^{n_{k-1}}\mathbb{R}x_{(k-1)i}$$

$x_{(k-1)i}$（$1\leqq i\leqq n_{k-1}$, $n_{k-1}=\dim\ \mathfrak{g}^{(k-1)}$）、は $\{[x_{1i},x_{(k-2)j}]/1\leqq i\leqq n_1,\ 1\leqq j\leqq n_{k-2}\}$ の中の1次独立なベクトルの組

これにより $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{(k-1)n_{k-1}}\}$ を得る。

Q.E.D

定義2．上の$x_1, x_2, \cdots, x_n$をベキ零リー環$\mathfrak{g}$の生成元，その個数をrankという。

§3．極大ベキ零リー環

定義3．k−step，n−rankのベキ零リー環の中で，最大次元をもつものを極大ベキ零リー環という。

極大ベキ零リー環の生成元を$x_1, x_2, \cdots, x_n$，

$\mathfrak{m}_1 = \{ x_{i_1} / 1 \leqq i_1 \leqq n \}$，

$\mathfrak{m}_2 = \{ [x_{i_2}, x_{i_1}] / 1 \leqq i_1, i_2 \leqq n \}$，

$\vdots$

$\mathfrak{m}_{k-1} = \{ [x_{i_{k-1}}, \cdots, [x_{i_2}, x_{i_1}] \cdots] / 1 \leqq i_1, i_2, \cdots, i_{k-1} \leqq n \}$，

$\mathfrak{m}$を$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \cdots, \mathfrak{m}_{k-1}$の和集合とする。

補題2．定義1の(1)，(2)は次の$(1)_1$，$(2)_1$と同値である。

$(1)_1$　$[x, Y] = -[Y, x]$　$(x \in \mathfrak{m}_1, Y \in \mathfrak{m})$

$(2)_1$　$[[x, Y], Z] = [x, [Y, Z]] - [Y, [x, Z]]$

$(x \in \mathfrak{m}_1, Y \in \mathfrak{m}, Z \in \mathfrak{m})$

（証明）

(1)，(2) $\Rightarrow$ $(1)_1$，$(2)_1$は明らかである．

逆に$(1)_1$，$(2)_1$から帰納法により次の$(1)_h$，$(2)_h$ $(1 \leqq h \leqq k-1)$

を得る。

$(1)_n$ $[X, Y] = -[Y, X]$ $(X \in \mathfrak{m}_n,\ Y \in \mathfrak{m})$

$(2)_n$ $[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$
$(X \in \mathfrak{m}_n,\ Y \in \mathfrak{m},\ Z \in \mathfrak{m})$

i) $n = 1$ の時は、$(1)_1$, $(2)_1$ となり成り立つ。

ii) n の時、成り立つとする。

このとき $x \in \mathfrak{m}_1$, $X \in \mathfrak{m}_n$, $Y \in \mathfrak{m}$ に対して、

$(1)_{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
&[[x, X], Y] \\
&= [x, [X, Y]] - [X, [x, Y]] && \because (2)_1 \\
&= [x, [X, Y]] + [[x, Y], X] && \because (1)_n \\
&= [x, [X, Y]] + [x, [Y, X]] - [Y, [x, X]] && \because (2)_1 \\
&= -[Y, [x, X]] && \because (1)_n
\end{aligned}
$$

また $Z \in \mathfrak{m}$ に対して、

$(2)_{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
&[[[x, X], Y], Z] \\
&= [[x, [X, Y]] - [X, [x, Y]], Z] && \because (2)_1 \\
&= [[x, [X, Y]], Z] - [[X, [x, Y]], Z] \\
&= ([x, [[X, Y], Z]] - [[X, Y], [x, Z]]) && \because (2)_1 \\
&\quad - ([X, [[x, Y], Z]] - [[x, Y], [X, Z]]) && \because (2)_n \\
&= ([x, [X, [Y, Z]]] - [x, [Y, [X, Z]]]) && \because (2)_n
\end{aligned}
$$

$$-([X,[Y,[x,Z]]]-[Y,[X,[x,Z]]]) \quad \because (2)_h$$
$$-([X,[x,[Y,Z]]]-[X,[Y,[x,Z]]]) \quad \because (2)_1$$
$$+([x,[Y,[X,Z]]]-[Y,[x,[X,Z]]]) \quad \because (2)_1$$
$$=([x,[X,[Y,Z]]]-[X,[x,[Y,Z]]])$$
$$-([Y,[x,[X,Z]]]-[Y,[X,[x,Z]]])$$
$$=[[x,X],[Y,Z]]-[Y,[[x,X],Z]] \quad \because (2)_1$$

Q.E.D

以下、簡略化の為、次の略記法を用いる。

$xX = x^1X = [x,X]$, $x^0X = X$ ($x \in \mathfrak{M}_1$, $X \in \mathfrak{M}$)

補題3. $(2)_1$ により $\mathfrak{M}$ の元のブラケット積は $\mathfrak{M}$ の元の1次結合で一意に表わす事ができる。即ち、

$(2)_1'$ $[x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, Z]$

$$= \sum_{\varepsilon_h,\cdots,\varepsilon_2=0,1} (-1)^{\varepsilon_h+\cdots+\varepsilon_2} x_{i_h}^{1-\varepsilon_h} \cdots x_{i_2}^{1-\varepsilon_2} x_{i_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_h}^{\varepsilon_h} Z$$

$(x_{i_h}\ (1 \leq h \leq k) \in \mathfrak{M}_1,\ Z \in \mathfrak{M})$

逆に、$(2)_1'$ により $(2)_1$ が成り立つ。

(証明)

$(2)_1$ を仮定すると

$$[x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, Z]$$
$$= x_{i_h}[x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, Z] - [x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, x_{i_h} Z] \quad \because (2)_1$$
$$= x_{i_h} x_{i_{h-1}} [x_{i_{h-2}} \cdots x_{i_1}, Z] - x_{i_h} [x_{i_{h-2}} \cdots x_{i_1}, x_{i_{h-1}} Z] \quad \because (2)_1$$

$$-x_{i_{h-1}}[x_{i_{h-2}}\cdots x_{i_1}, x_{i_h}Z] + [x_{i_{h-2}}\cdots x_{i_1}, x_{i_{h-1}}x_{i_h}Z] \qquad \because (2)_1$$
$$= \cdots$$

これを続けると$(2)'_1$を得る.

逆に$(2)'_1$を仮定し、$x\in\mathfrak{M}_1$, $Y = x_{i_h}x_{i_{h-1}}\cdots x_{i_1}\in\mathfrak{M}_h$, $Z\in\mathfrak{M}$とする。

$$[x,[Y,Z]]$$
$$= [x x_{i_h}\cdots x_{i_1}, Z]$$
$$= \sum_{\varepsilon,\varepsilon_h,\cdots,\varepsilon_2=0,1}(-1)^{\varepsilon+\varepsilon_h+\cdots+\varepsilon_2} x^{1-\varepsilon}x_{i_h}^{1-\varepsilon_h}\cdots x_{i_1}\cdots x_{i_h}^{\varepsilon_h}x^{\varepsilon}Z \qquad \because (2)'_1$$
$$= x\sum_{\varepsilon_h,\cdots,\varepsilon_2=0,1}(-1)^{\varepsilon_h+\cdots+\varepsilon_2} x_{i_h}^{1-\varepsilon_h}\cdots x_{i_1}\cdots x_{i_h}^{\varepsilon_h}Z$$
$$- \sum_{\varepsilon_h,\cdots,\varepsilon_2=0,1}(-1)^{\varepsilon_h+\cdots+\varepsilon_2} x_{i_h}^{1-\varepsilon_h}\cdots x_{i_1}\cdots x_{i_h}^{\varepsilon_h}xZ$$
$$= [x,[Y,Z]] - [Y,[x,Z]] \qquad \because (2)_1$$

§4. 極大ベキ零リー環系の基底

定義4. $\mathfrak{M}_h$ ($1\leqq h\leqq K-1$) の元に(辞書式)順序を次の様にいれる.

1) $Y\in\mathfrak{M}_{h'}$, $X\in\mathfrak{M}_h$ ($h'>h$) のとき $Y>X$

2). $x_{ih_0}>x_{jh_0}$, $x_{i(h_0-1)}=x_{j(h_0-1)}$, $\cdots$, $x_{i1}=x_{j1}$ を満たす h_0 ($h_0\leqq h$) が存在するとき.

$$x_{ih}x_{i(h-1)}\cdots x_{i1} > x_{jh}x_{j(h-1)}\cdots x_{j1}$$

と定める。

2)$_1$ $(1)_1$, $(2)'_1$ を使って帰納的に極大べき零リー環$\mathfrak{g}$の基底を、とりだすことができる。

i) $\mathfrak{m}_1$の元の組 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ は1次独立だから基底にいれる。

ii) $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_h}$ を$\mathfrak{m}_h$から取りだした最大個数の1次独立な組とする（即ち$n_h = \dim\ \mathfrak{g}^{(h)}/\mathfrak{g}^{(h+1)}$）。

そのとき$\mathfrak{m}_{h+1}$の全ての元は、

2 $$\begin{aligned}\mathfrak{m}'_{h+1} = \{ & x_n Y_{n_h}, & x_{n-1} Y_{n_h}, & \quad \cdots, & x_1 Y_{n_h} \\ & x_n Y_{n_{h-1}}, & x_{n-1} Y_{n_{h-1}}, & \quad \cdots, & x_1 Y_{n_{h-1}} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & x_n Y_1, & x_{n-1} Y_1, & \quad \cdots, & x_1 Y_1 \}\end{aligned}$$

の元に1次従属である。

故に、$\mathfrak{m}'_{h+1}$の元から1次独立な元を選びだせばよい。
$\mathfrak{m}'_{h+1}$の最大元は、$x_n Y_{n_h} = -[Y_{n_h}, x_n]$により$\mathfrak{m}'_{h+1}$内の線形関係を与える。この関係が恒等式でないならば、その式に表われる最小元を$\mathfrak{m}'_{h+1}$から除く。

以下、2番目、3番目等の元について同様の手続を行うと最終の$\mathfrak{m}'_{h+1}$は1次独立であり求めるものである。

定義5. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$をリー環、fを$\mathfrak{g}$から$\mathfrak{h}$の上への1次写像とする。そのとき次の条件を満たすfを同型写像、$\mathfrak{g}$と$\mathfrak{h}$は

同型であるという。

(1) $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$

(2) $X \neq Y$ ならば $f(X) \neq f(Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$

定義6. $Y \in \mathfrak{m}_{h'}$, $X \in \mathfrak{m}_h$ $(h' > h)$ に $Y = x_{h'-h} x_{h'-h-1} \cdots x_{h+1} X$ $(x_i$ $(h+1 \leqq i \leqq h'-h) \in \mathfrak{m}_1)$ の関係があるとき、Y を X の下位のベクトルという。

定理

1) 同じ rank, step をもつ極大べき零リー環 $\mathfrak{g}$ は全て同型である。

2) 任意のべき零リー環 $\mathfrak{g}$ は同じ rank, step をもつ極大べき零リー環の部分リー環である。更に $\mathfrak{g}$ の基底は $\bar{\mathfrak{g}}$ の基底の元に(下位のベクトルを除いて)順位の高い元との1次結合を与え、それらを除くことにより得られる。逆に、そのような1次結合を与えることにより、べき零リー環を得ることができる。

(証明)

1) 極大べき零リー環 $\bar{\mathfrak{g}}$ の基底は、$(1)_1$, $(2)_1'$ の関係だけを用いて得られるから明らかである。

2) §1, 補題1 の手順で1次独立な元を順位の高い方か

ら取っていけばよい。また下位ベクトルとの1次結合がある場合には、ベキ零ではなくなる。

逆に上のような線形結合を与えても条件$(1)_1$, $(2)'_1$に反しないからベキ零リー環を得る。

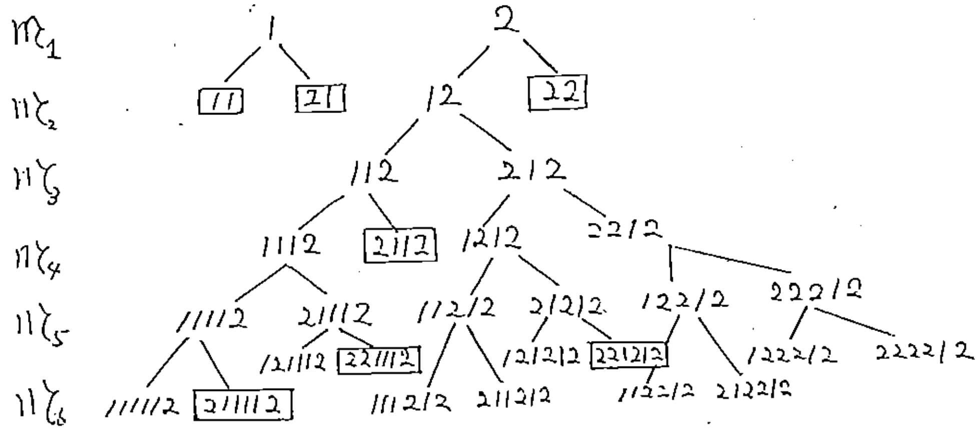
§5. 極大ベキ零リー環の例

§4の方法で得られる例を示す。以下、次の略記法を用いる。

$$i_h\, i_{h-1} \cdots i_1 = x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1} \in \mathfrak{n}_h \quad (1 \leqq h \leqq k-1)$$

また□は他のベクトルに従属するものを表わし、線／は下位ベクトルへの対応を表わす。

例　2-rank, 6step ($\mathfrak{n}_1 = \{x_1, x_2\}$)



$$11 = 0,\quad 21 = -12,\quad 22 = 0,\quad 2112 = 1212$$

$$211112 = -111212 + 121112 \times 2$$

$$221112 = -121212 \times 3 + 112212 + 211212 \times 3$$

$$221212 = -122212 + 212212 \times 2$$

§6．ベキ零リー環の分類

補題4．$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$をn-rank，k-stepのベキ零リー環、$\bar{\mathfrak{g}}$をそれを含む極大ベキ零リー環、$\mathfrak{M}_1=\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n}\}$とする。そのとき次の条件は同値である。

1）$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$は同型である．

2）$x_{11},x_{12},\cdots,x_{(k-1)n_{k-1}}$を$\mathfrak{h}$の基底とするとき、行列$A$（$n\times n$, $|A|\neq 0$），$B((N-n)\times n)$（$N=\dim\mathfrak{h}$）が存在し、$\mathfrak{h}$の他の生成元として$\{x^*_{11},x^*_{12},\cdots,x^*_{1n}\}$をとると、$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$は$\bar{\mathfrak{g}}$の基底に同じ線形関係を与える．

但し．

$$(*)\qquad \begin{pmatrix} x^*_{11} \\ x^*_{12} \\ \vdots \\ x^*_{1n} \end{pmatrix} = (A\ B) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{(k-1)n_{k-1}} \end{pmatrix}$$

とする．

（証明）

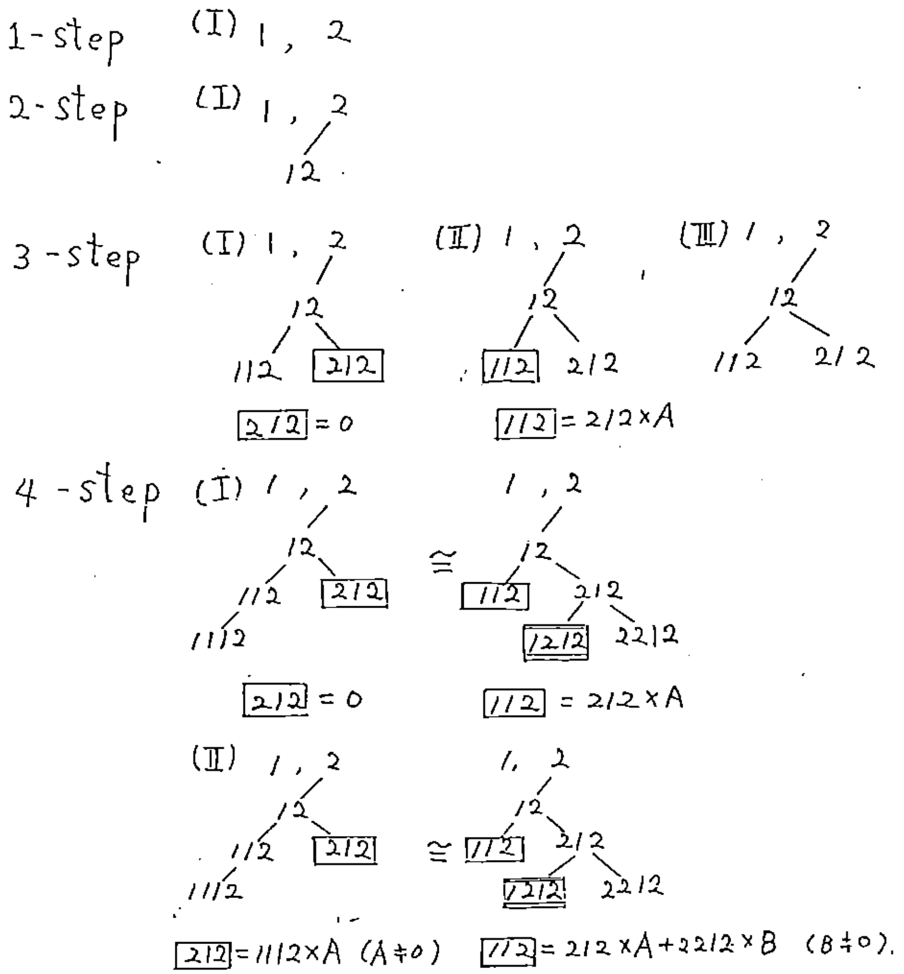
1）⇒ 2）

$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$が同型ならば．定義5の1），2）を満たす$f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$が存在する。これを用いると、$x^*_{1i}=f(x_{1i})$（$1\leqq i\leqq n$）は$\mathfrak{h}$の生成元であり、$\mathfrak{g}$の基底に同じ線形関係を与える。

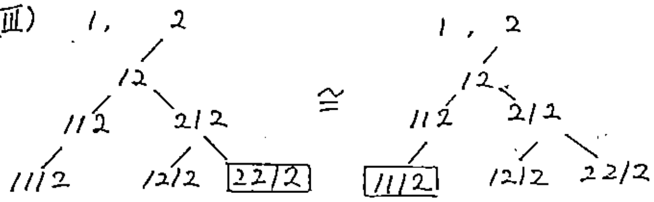
故に. (※) を満たす A, B が存在する。

2) ⇒ 1) は明らかである.

§4 の定理により得られる部分リー環の可能な場合について. 補題4によって同値なものを求めると次のようになる。



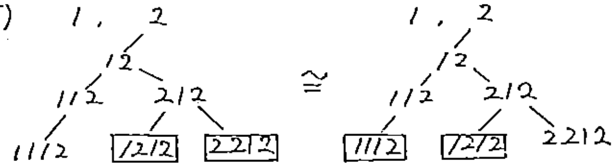
(III)



$\boxed{2212} = 0$

$\boxed{1112} = 1212 \times A + 2212 \times B \quad (A^2+4B=0)$

(IV)



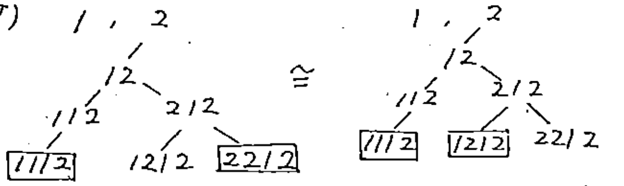
$\boxed{1212} = 0$

$\boxed{2212} = 0$

$\boxed{1112} = 2212 \times A \quad (B = A^2)$

$\boxed{1212} = 2212 \times B$

(V)



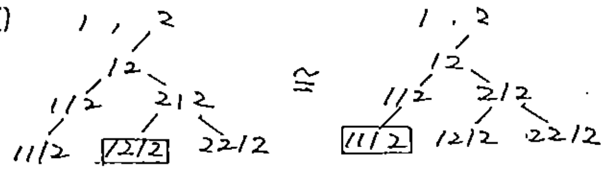
$\boxed{1112} = 1212 \times A$

$\boxed{2212} = 0$

$\boxed{1112} = 2212 \times A \quad (B < A^2)$

$\boxed{2212} = 2212 \times B$

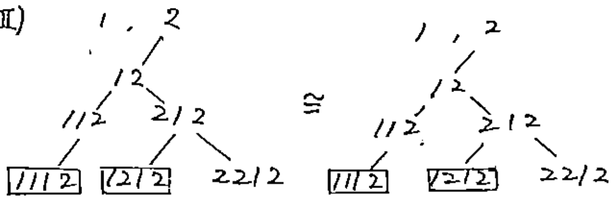
(VI)



$\boxed{1212} = 2212 \times A$

$\boxed{1112} = 1212 \times A + 2212 \times B \quad (A^2+4B>0)$

(VII)



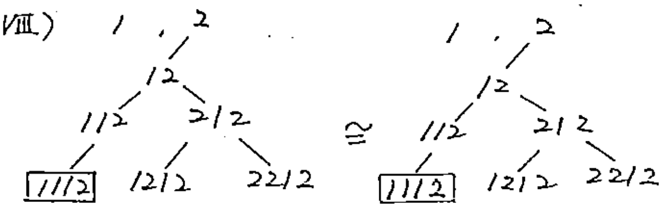
$\boxed{1112} = 2212$

$\boxed{1212} = 0$

$\boxed{1112} = 2212 \times A \quad (B > A^2)$

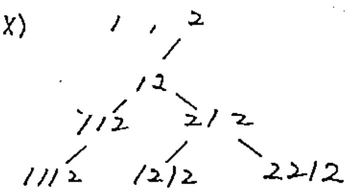
$\boxed{1212} = 2212 \times B$

(VIII)



$\boxed{1112} = -2212$ $\qquad$ $\boxed{1112} = 1212 \times A + 2212 \times B \quad (A^2+4B<0)$

(IX)



但し ▤ は □ から導かれる。

References

(1) H. Fujiwara, Affine structures of some solvable Lie groups, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 33 (1979), 346-353.

(2) Y. Takemoto, Study on construction of an affine structure of nilpotent Lie groups, Bull. Oita Inst. Tech., 10 (1982), 126-132.

(3) G. Vrănceanu, Lecţii de geometrie diferenţială IV, Bucureşti, 1968.

(4) S. Yamaguchi, Derivations and affine structures of some nilpotent Lie algebras, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 34 (1980), 151-170.